

INSTYTUT ŁACZNOŚCI

REFERATY PROBLEMOWE

Zeszyt 36

Zbigniew Kowalski

ZASADY OKREŚLANIA TŁUMIENNOŚCI PASMOWEJ
NA PODSTAWIE DANYCH PUNKTOWYCH



Warszawa - grudzień 1980

62-374.5.018.8

INSTYTUT ŁĄCZNOŚCI

KOŁO ZAKŁADOWE STOWARZYSZENIA ELEKTRYKÓW POLSKICH



Na prawach rękopisu

REFERATY PROBLEMOWE

Zeszyt 36

Zbigniew Kowalski

ZASADY OKREŚLANIA TŁUMIENNOŚCI PASMOWEJ
NA PODSTAWIE DANYCH PUNKTOWYCH

Warszawa - grudzień 1980

5-8824

Zespół Redakcyjny:

dr inż. Stanisław Sołta, mgr inż. Andrzej Stagrowski,
mgr inż. Maria Waśniewska

Opracował:

dr inż. Zbigniew Kowalski
Zakład Sieci Telekomunikacyjnych /Z-3/

Instytut Łączności

04-894 Warszawa, ul. Szachowa 1, tel. 128-246

Praca nr 11.01.B.02.01

Opiniował: doc. dr hab. inż. Stanisław Dymowski

Maszynopis dostarczono dnia 9 października 1980 r.

W referacie przedstawiono metodę szacowania tłumienności pasmowej czwórników na podstawie liniowej kombinacji tłumienności punktowych, wyznaczanych przy ustalonych częstotliwościach pasma przesyłowego. Wykazano, że ze względu na addytywność przy łańcuchowym łączeniu czwórników należy w praktyce stosować homomorficzne kombinacje liniowe dla punktowych oszacowań pasmowej tłumienności skrośnej.

BIBLIOTEKA
Instytutu Łączności
Nr 5-8824

Redaktor: mgr K. Juszkievicz

Montaż tekstu: B. Drabik

Wpłynęło do Działu Wydawniczego Instytutu Łączności
w Warszawie, ul. Szachowa 1 dnia 19.XII.1980 r.
Nakład 70 egz.

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wprowadzenie	1
2. Ogólne zasady punktowego wyznaczania tłumienności pasmowej	2
3. Punktowe aproksymaty tłumienności pasmowej i ich efektywność	5
4. Metoda tworzenia aproksymat o równych wagach	8
5. Zagadnienie addytywności punktowych aproksymat pasmowej tłumienności skrośnej	10
6. Zakończenie	17
Wykaz literatury	18
Podziękowanie	18

1. WPROWADZENIE

W referacie [2] zdefiniowano grupę nowych wielkości: pasmowych tłumienności czwórników, stanowiących uogólnienie na całe pasmo częstotliwości dotychczas stosowanych wielkości, tzn. tłumienności punktowych, które obiektywnie charakteryzują czwórniki elektryczne przy dowolnych ale ustalonych częstotliwościach. Pasmowa tłumienność określonego rodzaju /skrośna, falowa, skuteczna,.../ czwórnika stanowi średnią ważoną jego punktowej tłumienności tego samego rodzaju w pasmie przesyłowym, a jej formalną definicję przedstawia całka:

$$\bar{A} = \int_{f_d}^{f_g} g(f) \varphi(f) df \quad //1-1/$$

W powyższym wzorze f_d oraz f_g oznaczają odpowiednio dolną oraz górną częstotliwość graniczną rozważanego pasma przesyłowego, g - unormowaną funkcję gęstości wagi, spełniającą warunki podane w pkt. 2.2 referatu [2], zaś φ - częstotliwościową charakterystykę tłumienności odpowiedniego rodzaju /skrośną, falową, skuteczną,.../ rozważanego czwórnika.

Ponieważ w dotychczasowej praktyce wartości tłumienności czwórników są wyznaczane punktowo, tzn. przy ustalonych częstotliwościach, zachodzi pytanie, w jaki sposób można oszacować wartość tłumienności pasmowej na podstawie danych wartości tłumienności punktowych oraz jaka jest dokładność takiego oszacowania. Nasuwają się również inne pytania, a mianowicie: jeżeli istnieją różne sposoby szacowania, to jaką miarę dobroci oszacowań można wprowadzić i jak znaleźć optymalny sposób szacowania.

Jak wiadomo z pkt. 2.4 referatu [2], ważną cechą pasmowej tłumienności skrośnej jest jej ściśła addytywność przy łańcuchowym łączeniu czwórników. W związku z tym powstaje pytanie, jakie warunki należy spełnić, aby zachować addytywność punktowych oszacowań pasmowej tłumienności skrośnej.

Próby odpowiedzi na powyższe pytania przedstawimy w dalszym ciągu niniejszego referatu.

2. OGÓLNE ZASADY PUNKTOWEGO WYZNACZANIA TŁUMIENNOŚCI PASMOWEJ

Rozważmy linearny i niezmienniczy czwórnik, którego częstotliwościowa charakterystyka φ tłumienności jest funkcją gładką /wielokrotnie różniczkowalną/ w całym pasmie przesyłowym:

$$f \in [f_d, f_g] \quad /2-1/$$

tzn. spełniającą warunek:

$$\bigwedge_{r \in \{1, 2, \dots\}} \varphi^{(r)}(f) < \infty \quad /2-2/$$

gdzie: r oznacza rząd pochodnej funkcji φ .

Jeżeli jest dane p wartości funkcji φ w punktach f_k , gdzie $k = 1, \dots, p$, przy czym:

$$f_d \leq f_1 < f_2 < \dots < f_{p-1} < f_p \leq f_g \quad /2-3/$$

to w całym przedziale /2-1/ wartości tej funkcji można określić na podstawie wzoru interpolacyjnego Lagrange'a:

$$\varphi(f) = \sum_{k=1}^p L_k(f) \cdot \varphi(f_k) + R_p(f) \quad /2-4/$$

gdzie wielkości:

$$L_k(f) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p \frac{f - f_i}{f_k - f_i} = \frac{(f - f_1) \dots (f - f_{k-1}) (f - f_{k+1}) \dots (f - f_p)}{(f_k - f_1) \dots (f_k - f_{k-1}) (f_k - f_{k+1}) \dots (f_k - f_p)} \quad /2-5/$$

są wielomianami Lagrange'a stopnia p dla węzła $k = 1, \dots, p$, jednoznacznie określonymi przez p liczb f_k spełniających nierówność /2-3/, zaś wielkość:

$$R_p(f) = \frac{\varphi^{(p)}(f_0)}{p!} \cdot \prod_{k=1}^p (f - f_k) \quad /2-6/$$

jest tzw. resztą, której wartość zależy od wartości $\varphi^{(p)}(f_0)$ pochodnej rzędu p funkcji φ określonej w punkcie

$$f_0 \in [f_d, f_g]$$

Podstawiając /2-4/ do /1-1/ otrzymamy następujące wyrażenie na tłumienność pasmową:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \int_{f_d}^{f_g} g(f) \left[\sum_{k=1}^p L_k(f) \cdot \varphi(f_k) + R_p(f) \right] df = \\ &= \sum_{k=1}^p \varphi(f_k) \int_{f_d}^{f_g} g(f) L_k(f) df + \int_{f_d}^{f_g} g(f) R_p(f) df = \\ &= \sum_{k=1}^p \varphi(f_k) \cdot G_k + \bar{R}_p \end{aligned} \quad /2-7/$$

W powyższym wzorze wielkości:

$$G_k = \int_{f_d}^{f_g} g(f) \cdot L_k(f) df; \quad k=1, \dots, p \quad /2-8/$$

są współczynnikami wagowymi /wagami/ tłumienności punktowych czwórnika przy częstotliwościach f_k /gdzie $k=1, \dots, p$ / spełniającymi warunek:

$$\sum_{k=1}^p G_k = 1 \quad /2-9/$$

Natomiast wielkość:

$$\bar{R}_p = \int_{f_d}^{f_g} g(f) \cdot R_p(f) df \quad /2-10/$$

jest błędem niepoprawności p -punktowego oszacowania pasmowej tłumienności rozważanego czwórnika.

Górną granicę modułu błędu niepoprawności R_p można wyznaczyć wprowadzając wielkość:

$$M_p = \sup_{f \in [f_d, f_g]} |\varphi^{(p)}(f)| \quad /2-11/$$

wówczas będzie:

$$|\bar{R}_p| \leq \frac{M_p}{p!} \cdot \int_{f_d}^{f_g} g(f) \cdot \prod_{k=1}^p (f - f_k) df \quad /2-12/$$

Jak każdą funkcję ciągłą w skończonym przedziale domkniętym, częstotliwościową charakterystykę φ tłumienności w pasmie przesyłowym $[f_d, f_g]$ każdego czwornika telekomunikacyjnego z dowolną dokładnością można wyrazić w postaci wielomianu skończonego stopnia s . Mianowicie, przyjmując dowolnie małą dodatnią stałą ϵ mamy, zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa:

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{s \in \mathbb{N}} \bigwedge_{s \geq s_\epsilon} \bigwedge_{f \in [f_d, f_g]} |\varphi(f) - \sum_{r=0}^s a_r f^r| < \epsilon \quad /2-13/$$

Jeżeli jako stałą ϵ przyjmiemy najmniejszą wartość różnicy tłumienności, którą można w praktyce wyznaczyć /tzw. próg rozróżnialności wartości/, to wówczas wielomian stopnia $s = s_\epsilon$ stanowi praktycznie dokładne wyrażenie częstotliwościowej charakterystyki czwornika w pasmie przesyłowym. Dlatego w dalszych rozważaniach przyjmiemy, że:

$$\bigwedge_{f \in [f_d, f_g]} \varphi(f) = \sum_{r=0}^s a_r f^r \quad /2-14/$$

gdzie a_r / $r = 0, 1, \dots, s$ / są stałymi współczynnikami przy r -tej potęgze częstotliwości f .

Należy zwrócić uwagę, że:

1. Jeśli częstotliwościowa charakterystyka φ tłumienności rozważanego czwornika jest wielomianem stopnia:

$$s < p \quad /2-15/$$

to zachodzi: $\varphi^{(p)}(f) \equiv 0$, a więc $M_p = 0$ i $\bar{R}_p = 0$.

Oznacza to, że na podstawie danych p wartości takiej funkcji określonych w punktach f_k /gdzie $k = 1, \dots, p$ / można dokładnie wyznaczyć wartość całki $\int_{f_d}^{f_g}$. Innymi słowy w rozważanym przypadku tłumienność pasmowa czwórnika jest jednoznacznie określona przez tłumienności punktowe tego czwórnika, wyznaczone przy ustalonych częstotliwościach pasma przesyłowego.

2. Jeśli warunek /2-15/ nie jest spełniony, to przy ustalonej wartości M_p maksymalna wartość modułu błędu niepoprawności \bar{R}_p zależy od p liczb f_k . Oznacza to, że w przypadku, gdy liczba danych tłumienności punktowych jest zbyt mała aby jednoznacznie określić tłumienność pasmową rozważanego czwórnika, istnieje możliwość minimalizacji maksymalnego błędu niepoprawności szacowania tłumienności pasmowej przez odpowiedni dobór częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych.

3. PUNKTOWE APROKSYMATY TŁUMIENNOŚCI PASMOWEJ I ICH EFEKTYWNOŚĆ

Przyjmijmy obecnie, że wartości punktowych tłumienności czwórników są wyznaczone niedokładnie, a mianowicie, że przy dowolnej częstotliwości $f_k \in [f_d, f_g]$ wykazują taką samą wartość σ błędu standardowego niepewności, nie wykazując jednocześnie błędu niepoprawności. Przy takim założeniu punktowe oszacowanie A_k tłumienności rozważanego czwórnika /o ustalonej częstotliwościowej charakterystyce φ tłumienności/ przy dowolnej, ale ustalonej częstotliwości f_k jest zmienną losową o wartości oczekiwanej równej:

$$E \{A_k\} = \varphi(f_k) \quad /3-1/$$

i o wariancji równej:

$$D^2 \{A_k\} = \sigma^2 \quad /3-2/$$

której wartość nie zależy od częstotliwości.

Utwórzmy wielkość:

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^p G_k \cdot A_k \quad /3-3/$$

którą nazwiemy p-punktową aproksymatą tłumienności pasmowej. Jest to zmienna losowa o wartości oczekiwanej równej:

$$E\{\tilde{A}\} = \sum_{k=1}^p G_k \cdot \Psi(f_k) \quad /3-4/$$

i wariancji /przy dodatkowym założeniu wzajemnego nieskorelowania błędów niepewności wyznaczania tłumienności punktowych przy różnych częstotliwościach f_k / równej:

$$D^2\{\tilde{A}\} = \sigma^2 \sum_{k=1}^p G_k^2 \quad /3-5/$$

Przy ustalonej wartości błędu standardowego σ niepewności danych punktowych aproksymaty tłumienności pasmowej są oszacowaniami tym dokładniejszymi, im mniejszą jest ich wariancja określona wzorem /3-5/. Jak widać ze wzorów /2-8/ oraz /2-5/, wielkość /3-5/ zależy od funkcji g gęstości wagi oraz od częstotliwości f_k /gdzie $k = 1, \dots, p$ / wyznaczania tłumienności punktowych.

Ze względu na związek /2-9/ dla każdej wartości liczby p punktów aproksymacji istnieje możliwość minimalizacji wielkości /3-5/ względem wartości częstotliwości f_k wyznaczania tłumienności punktowych przy każdej ustalonej funkcji g gęstości wagi. Mianowicie minimalizacja wariancji $D^2\{\tilde{A}\}$ zachodzi przy spełnieniu warunku równości wszystkich współczynników wagowych, tzn. gdy:

$$\bigwedge_{k=1, \dots, p} G_k = \frac{1}{p} \quad /3-6/$$

a wówczas:

$$\min D^2\{\tilde{A}\} = \frac{\sigma^2}{p} \quad /3-7/$$

oraz:

$$\tilde{A} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p A_k \quad /3-8/$$

Ze względu na minimalną wariancję, p-punktową aproksymatę tłumienności pasmowej określoną wzorem /3-8/ nazwiemy najefektywniejszą. Metodę tworzenia najefektywniejszych aproksymat przedstawimy w pkt. 4 niniejszego referatu. Tworzenie takich aproksymat polega na określeniu wartości p częstotliwości f_k spełniających warunek /3-6/ równości współczynników wagowych G_k przy ustalonej funkcji g gęstości wagi.

Może się jednak okazać, że wartości częstotliwości f_k /gdzie $k = 1, \dots, p$ / wyznaczania tłumienności punktowych tworzących najefektywniejsze p-punktowe aproksymaty są nierzeczywiste^{x/}, albo w praktyce nierealizowalne^{x/}. Przy technicznej realizacji może zachodzić potrzeba stosowania określonych częstotliwości f_k o wartościach różnych od optymalnych, charakteryzujących aproksymaty najefektywniejsze. Oczywiście tak utworzone aproksymaty mają wariancję określoną wzorem /3-5/, a więc o wartości większej od minimalnej, określonej wzorem /3-7/. Jako miernik efektywności p-punktowej aproksymaty tłumienności pasmowej charakteryzującej się określonymi wartościami f_k częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych, przyjmijmy wielkość:

$$e = \frac{\min D^2 \{\tilde{A}\}}{D^2 \{\hat{A}\}} = \frac{1}{p \cdot \sum_{k=1}^p G_k^2} \quad /3-9/$$

którą nazwiemy względną efektywnością p-punktowej aproksymaty.

Należy zwrócić uwagę, że wielkość /3-9/ przyjmuje wartości zawarte w przedziale:

$$0 < e \leq 1 \quad /3-10/$$

osiągając górną granicę równą jedności w przypadku określonym warunkiem /3-6/.

Przy tworzeniu aproksymat opartych na założonych wartościach częstotliwości f_k wyznaczania tłumienności punktowych należy dążyć do ustalania takich wartości tych częstotliwości, aby osiągnąć możliwie dużą wartość względnej efektywności tworzonej p-punktowej aproksymaty.

^{x/} Patrz uwaga na końcu pkt. 4 niniejszego referatu.

4. METODA TWORZENIA APROKSYPMAT O RÓWNYCH WAGACH

Metoda tworzenia najefektywniejszych aproksymat tłumienności pasmowej polega na określeniu takiego zbioru częstotliwości $\{f_1, \dots, f_p\}$ wyznaczenia tłumienności punktowych, aby przy możliwie najwyższym stopniu s wielomianu /2-14/ określającego częstotliwościową charakterystykę ψ tłumienności czwórnika, każda p-punktowa aproksymata o równych wagach była nieobciążonym estymatorem tłumienności pasmowej określonej wzorem /1-1/, tzn. aby był spełniony warunek:

$$\bigwedge_p \bigvee_{\max s} E \{ \tilde{A} \} = \bar{A} \quad /4-1/$$

Podstawiając do wzoru /4-1/ wyrażenia /3-4/, /3-6/, /1-1/ oraz /2-14/ otrzymamy następującą postać tego warunku:

$$\bigwedge_p \bigvee_{\max s} \sum_{r=0}^s a_r \cdot \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p f_k^r = \sum_{r=0}^s a_r \int_{f_d}^{f_g} f^r g(f) df \quad /4-2/$$

Należy zauważyć, że wyrażenie:

$$m_r = \int_{f_d}^{f_g} f^r g(f) df \quad /4-3/$$

jest momentem zwyczajnym rzędu r rozkładu wagi w pasmie przeszytowym $[f_d, f_g]$, jednoznacznie określonym przez funkcję g .

Podstawiając /4-3/ do /4-2/ otrzymamy ostateczną postać warunku /4-1/:

$$\bigwedge_p \bigvee_{\max s} \sum_{r=0}^s a_r \cdot \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p f_k^r = \sum_{r=0}^s a_r \cdot m_r \quad /4-4/$$

Równość /4-4/ powinna być spełniona dla każdego ustalonego wektora współczynników $\{a_0, a_1, \dots, a_s\}$, określających częstotliwościową charak-

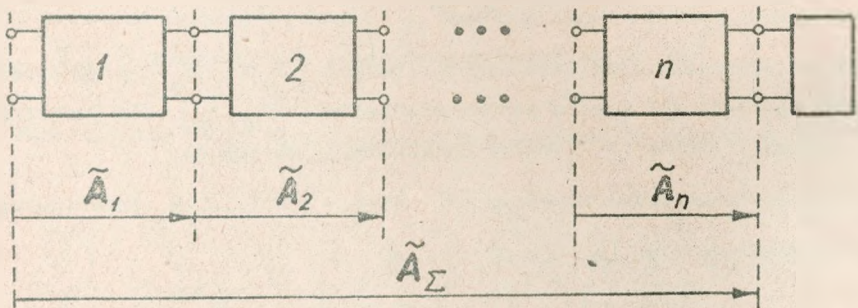
W praktyce okazuje się, że powyższy układ równań nie zawsze ma rozwiązanie rzeczywiste, tzn. nie dla wszystkich funkcji g gęstości wagi oraz liczb p punktów aproksymacji można wyznaczyć częstotliwości, przy których jest spełniony warunek /3-6/. Innymi słowy nie zawsze istnieją najefektywniejsze p -punktowe aproksymaty tłumienności pasmowej^{x/}.

Ponadto istniejące rozwiązania układu równań /4-9/ są liczbami niewymiernymi, charakteryzującymi częstotliwości sygnałów technicznie nierealizowalnych. Dlatego w praktyce stosuje się częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych o wartościach tylko zbliżonych do rozwiązań powyższego układu równań, a więc tylko suboptymalne ze względu na efektywność tworzonych aproksymat tłumienności pasmowych^{x/}.

5. ZAGADNIENIE ADDYTYWNOŚCI PUNKTOWYCH APROKSYPAT PASMOWEJ TŁUMIENNOŚCI SKROŚNEJ

Jak wykazano w pkt. 2 referatu [2], przy ustalonej funkcji g gęstości wagi zachodzi ściśła addytywność pasmowej tłumienności skrośnej czwórników połączonych łańcuchowo. Jednakże przy ustalonej funkcji g można tworzyć aproksymaty tłumienności pasmowej różniące się zarówno liczbą punktów p , jak i częstotliwościami f_k /gdzie $k = 1, \dots, p$ / wyznaczania tłumienności punktowych.

W celu zbadania warunków addytywności aproksymat pasmowej tłumienności skrośnej rozważmy przedstawiony na rys. 1 łańcuch n linearnych i niezmienniczych czwórników, obciążony dwójnikiem o takich samych właściwościach.



Rys. 1. łańcuch n czwórników i punktowe aproksymaty ich pasmowej tłumienności skrośnej

^{x/} Patrz przykład podany w pkt. 2 referatu [3].

Wyznaczymy wielkość:

$$R = \tilde{A}_{\Sigma} - \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i \quad /5-1/$$

stanowiącą różnicę między aproksymatą pasmowej tłumienności skrośnej całego łańcucha, a sumą aproksymat pasmowej tłumienności skrośnej czwórników składowych tego łańcucha.

Rozważmy ogólny przypadek heteromorficzności aproksymat, tzn. przyjmijmy, że:

1/ liczba punktów aproksymacji dla poszczególnych czwórników oraz dla całego łańcucha nie musi być jednakowa, tzn.:

$$p_1 \geq \dots \geq p_n \geq p_{\Sigma} \quad /5-2/$$

2/ częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych dla poszczególnych czwórników oraz dla całego łańcucha nie muszą być jednakowe /nawet w przypadku jednakowej liczby punktów aproksymacji/, tzn:

$$\bigwedge_{i \in \{1, \dots, n\}} \bigwedge_{k_i} f_{k_1} \geq \dots \geq f_{k_n} \geq f_{k_{\Sigma}} \quad /5-3/$$

W takim przypadku aproksymata pasmowej tłumienności skrośnej rozważanego n-ogniowego łańcucha, wyznaczana na podstawie danych wartości tłumienności punktowych /jako wyniki pomiarów całego łańcucha/ wynosi:

$$\tilde{A}_{\Sigma} = \sum_{k_{\Sigma}=1}^{p_{\Sigma}} G_{k_{\Sigma}} \cdot A_{k_{\Sigma}} \quad /5-4/$$

Natomiast aproksymata pasmowej tłumienności skrośnej czwórnika, stanowiącego i-te ogniwo rozważanego łańcucha /patrz rys. 1/, wynosi:

$$\tilde{A}_i = \sum_{k_i=1}^{p_i} G_{k_i} \cdot A_{k_i} \quad /5-5/$$

gdzie $i = 1, \dots, n$.

Wielkości /5-4/ oraz /5-5/ są zmiennymi losowymi o parametrach rozkładu określonych wzorami /3-4/ oraz /3-5/. Ze względu na centralne twierdzenie graniczne rachunku prawdopodobieństwa określona wzorem /5-1/ wielkość

R jest zmienną losową o rozkładzie asymptotycznie normalnym, którego parametry (\bar{R}, σ_R) można wyznaczyć w następujący sposób.

Na podstawie wzorów /3-4/ oraz /2-7/ mamy:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= E \left\{ \tilde{A}_\Sigma - \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i \right\} = \dots \\ &= (\bar{A}_\Sigma - \bar{R}_{P_\Sigma}) - \sum_{i=1}^n (\bar{A}_i - \bar{R}_{P_i}) \end{aligned} \right\} \quad /5-6/$$

a ponieważ zachodzi ścisła addytywność pasmowej tłumienności skrośnej, tzn. równość:

$$\bar{A}_\Sigma = \sum_{i=1}^n \bar{A}_i \quad /5-7/$$

więc wartość oczekiwana błędu nieaddytywności heteromorficznych aproksymat pasmowej tłumienności skrośnej wynosi:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{R}_{P_i} - \bar{R}_{P_\Sigma} \quad /5-8/$$

Przyjmując, że wszystkie oszacowania punktowej tłumienności skrośnej /zarówno całego rozważanego łańcucha, jak i poszczególnych jego ogniw/ wykazują taką samą wartość σ błędu standardowego niepewności, na podstawie wzoru /3-5/ mamy:

$$\sigma_R = D \left\{ \tilde{A}_\Sigma - \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i \right\} = \sigma \cdot \sqrt{\sum_{k_\Sigma=1}^{P_\Sigma} G_{k_\Sigma}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{k_i=1}^{P_i} G_{k_i}^2} \quad /5-9/$$

Ze względu na asymptotyczną normalność rozkładu zmiennej losowej R błędu nieaddytywności można łatwo wyznaczyć prawdopodobieństwo \mathcal{P} , że moduł tego błędu przekracza określoną wartość $q > 0$, a mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P} \{ |R| > q \} &= \mathcal{P} \{ R < -q \} + \mathcal{P} \{ R > q \} = \\ &= \mathcal{P} \left\{ \frac{R - \bar{R}}{\sigma_R} < -\frac{q - \bar{R}}{\sigma_R} \right\} + \mathcal{P} \left\{ \frac{R - \bar{R}}{\sigma_R} > \frac{q - \bar{R}}{\sigma_R} \right\} = \\ &= \Phi \left(-\frac{q - \bar{R}}{\sigma_R} \right) + 1 - \Phi \left(\frac{q - \bar{R}}{\sigma_R} \right) = 2 - \left[\Phi \left(\frac{q - \bar{R}}{\sigma_R} \right) + \Phi \left(\frac{q - \bar{R}}{\sigma_R} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad /5-10/$$

gdzie $\Phi(x)$ oznacza wartość dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego, określoną w punkcie x .

Jak wynika z właściwości tego rozkładu, przy dowolnej wartości kwantu q powyższe prawdopodobieństwo minimalizuje się, gdy:

$$\bar{R} = 0 \quad /5-11/$$

a wówczas:

$$P\{|R| > q\} \cong 2 \left[1 - \Phi\left(\frac{q}{\sigma_R}\right) \right] \quad /5-12/$$

Istnieją dwa alternatywne warunki dostateczne równości /5-11/, a mianowicie:

1. Gdy dla każdego czwórnika wchodzącego w skład rozważanego łańcucha oraz dla całego łańcucha nie występują błędy niepoprawności \bar{R}_i /gdzie $i = 1, \dots, n/$ oraz \bar{R}_{Σ} tzn. gdy jest spełniony następujący układ nierówności^{x/}:

$$\begin{aligned} p_1 &> s_1 \\ p_2 &> s_2 \\ &\dots\dots\dots \\ p_n &> s_n \\ p_{\Sigma} &> s_{\Sigma} \end{aligned} \quad /5-13/$$

gdzie s_i / $i = 1, \dots, n/$ oraz s_{Σ} oznaczają stopień wielomianu /2-14/ określającego częstotliwościową charakterystykę tłumienności skrośnej czwórnika, stanowiącego i -te ogniwo rozważanego łańcucha albo równoważnego całości tego łańcucha.

Należy jednak zwrócić uwagę, że w występujących w praktyce przypadkach liczby s_i są z reguły nie znane - dlatego nie wiadomo czy układ nierów-

^{x/} Uzasadnienie podano w pkt. 2; ponadto jak wykazano w pkt. 4, w przypadku aproksymat o równych wagach spełnienie warunku dostatecznego zachodzi przy układzie nierówności nieostrych /tzn. zawierających symbol \geq /.

ności /5-13/ jest spełniany - a więc w praktyce warunek /I/ jest niesprawdzalny^{x/}.

II. Gdy dla każdego czwórnika wchodzącego w skład rozważanego łańcucha oraz dla całego łańcucha jest spełniony następujący układ równości:

$$\bigwedge_{i=1, \dots, n} p_i = p_{\Sigma} = p \quad /5-14/$$

oraz

$$\bigwedge_{i=1, \dots, n} \bigwedge_{k=1, \dots, p} f_{ki} = f_{k\Sigma} = f_k \quad /5-15/$$

Równości /5-14/ i /5-15/ oznaczają, że zarówno liczba p punktów jak i wartości f_k /gdzie $k = 1, \dots, p$ / częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych są jednakowe dla wszystkich czwórników stanowiących ogólniwa składowe łańcucha oraz dla całego łańcucha.

Powyższe równości oznaczają homomorficzność punktowych aproksymat tłumienności pasmowej na zbiorze rozważanych czwórników.

Warunek /II/ może być stosowany w praktyce.

W przypadku homomorficzności aproksymat przy każdej częstotliwości $f_k \in [f_d, f_g]$, gdzie $k = 1, \dots, p$ zachodzi związek:

$$\varphi_{\Sigma}(f_k) = \sum_{k=1}^p \varphi_i(f_k) \quad /5-16/$$

wynikający z addytywności punktowych tłumienności skrośnych przy łańcuchowym połączeniu czwórników.

x/ Dla przykładu:

Jak wykazały wstępne badania czwórników stanowiących międzymiastowe łańcza telefoniczne realizowane w nowoczesnych analogowych systemach nośnych - ich częstotliwościowe charakterystyki tłumienności w pasmie przesyłowym 0,3 ÷ 3,4 kHz wykazują liczbę 1 ekstremów wynoszącą do kilkunastu /np. 1 = 14/. Ponieważ minimalny stopień wielomianu odwzorowujący charakterystykę o 1 ekstremach wynosi $\min s = 1 + 1$, przeto minimalna liczba punktów aproksymacji przy której zeruje się błąd niepoprawności R_p wynosi $\min p = 1 + 2$ /a więc dla wyżej podanego przykładu $\min p = 16$ /. Ponieważ prawdopodobnie ze względów ekonomicznych w praktyce będą stosowane aproksymaty tłumienności pasmowej oparte o stosunkowo małą liczbę p punktów /np. $p = 3 \div 9$ /, zatem należy oczekiwać, że warunek /I/ z reguły nie będzie spełniony w przypadku czwórników wchodzących w skład sieci telefonicznej.

Pasmowa tłumienność skrośna rozważanego łańcucha czwórników, zgodnie ze wzorem /2-7/, wynosi:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_\Sigma &= \sum_{k=1}^p G_k \cdot \psi_\Sigma(f_k) + \bar{R}_{p\Sigma} = \\ &= \sum_{k=1}^p G_k \cdot \sum_{l=1}^n \psi_l(f_k) + \bar{R}_{p\Sigma} = \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p G_k \cdot \psi_l(f_k) + \bar{R}_{p\Sigma} = \\ &= \sum_{l=1}^n (\bar{A}_l - \bar{R}_{pl}) + \bar{R}_{p\Sigma} \end{aligned} \right\} /5-17/$$

Podstawiając /5-7/ do /5-17/ otrzymamy:

$$\bar{R}_{p\Sigma} - \sum_{l=1}^n \bar{R}_{pl} = 0 \quad /5-18/$$

co dowodzi, że warunkiem dostatecznym minimalizacji prawdopodobieństwa występowania błędów nieaddytywności jest homomorficzność aproksymat pasmowej tłumienności skrośnej.

W przypadku homomorficzności aproksymat, niezależnie od liczby p punktów aproksymacji są spełnione następujące warunki:

$$\bar{R} = E \left\{ \tilde{A}_\Sigma - \sum_{l=1}^n \tilde{A}_l \right\} = 0 \quad /5-19/$$

oraz

$$\sigma_R = D \left\{ \tilde{A}_\Sigma - \sum_{l=1}^n \tilde{A}_l \right\} = \sigma \cdot \sqrt{(n+1) \sum_{k=1}^p G_k^2} \quad /5-20/$$

Wzory /5-19/ oraz /5-20/ oznaczają, że homomorficzne aproksymaty pasmowej tłumienności skrośnej wykazują tylko pozorną /a nie istotną/ nieaddytywność, wynikającą jedynie z błędów niepewności ocen tłumienności punktowych. Gdy błąd standardowy σ niepewności danych punktowych dąży do zera, to w granicy zachodzi ścisła addytywność homomorficznych aproksymat pasmo-

wej tłumienności skrośnej - niezależnie od liczby p punktów aproksymacji, a to dlatego że:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma_R = 0 \quad /5-21/$$

i rozkład zmiennej losowej R staje się jednopunktowy, tzn.:

$$\text{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow 0} \tilde{A}_\Sigma = \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i \quad /5-22/$$

Dla p -punktowych aproksymat o efektywności e określonej wzorem /3-9/ wyrażenie /5-20/ przyjmuje postać:

$$\sigma_R = \sigma \cdot \sqrt{\frac{n+1}{p \cdot e}} \quad /5-23/$$

Podstawiając /5-23/ do /5-12/ otrzymamy wyrażenie na prawdopodobieństwo \mathcal{P} , że moduł błędu nieaddytywności p -punktowych homomorficznych aproksymat pasmowej tłumienności skrośnej przekroczy wartość kwantu q przy tańcuchowym połączeniu n czwórników:

$$\mathcal{P}\{|R| > q\} \cong 2 \left[1 - \Phi \left(\frac{q}{\sigma} \sqrt{\frac{p \cdot e}{n+1}} \right) \right] \quad /5-24/$$

Stawiając wymaganie, aby powyższe prawdopodobieństwo było dostatecznie małe, tzn. aby był spełniony warunek:

$$\mathcal{P}\{|R| > q\} \leq \varepsilon \quad /5-25/$$

gdzie ε jest dodatnią stałą dostatecznie bliską zero, z równania /5-24/ można otrzymać warunek na minimalną liczbę p punktów aproksymacji, a mianowicie:

$$p \geq \frac{n+1}{e} \left[\frac{\sigma}{q} \cdot \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right]^2 \quad /5-26/$$

gdzie $\Phi^{-1}(r)$ oznacza kwantyl rzędu r standaryzowanego rozkładu normalnego.

Ponieważ jednakże prawa strona nierówności /5-26/ jest liczbą rzeczywistą, zaś lewa - liczbą naturalną, minimalną liczbę p punktów aproksymacji należy określać z zależności:

$$\min p = \text{int} \left\{ \frac{n+1}{e} \left[\frac{\sigma}{q} \cdot \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \right]^2 + 1 \right\} \quad /5-27/$$

gdzie $\text{int} \{x\}$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x .

Warto dodać, że warunek /5-25/ zostanie spełniony dla wszystkich aproksymat o liczbie punktów określonych wzorem /5-27/, jeśli efektywność tych aproksymat będzie co najmniej równa:

$$e \geq \frac{n+1}{\min p} \cdot \left[\frac{\sigma}{q} \cdot \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \right]^2 \quad /5-28/$$

6. ZAKOŃCZENIE

W referacie wykazano, że tłumienności pasmowe czwórników można wyznaczyć na podstawie liniowych kombinacji tłumienności punktowych tych czwórników przy ustalonych częstotliwościach z pasma przesyłowego. Stwierdzono, że przy niepewnych danych punktowych najefektywniejszymi /najdokładniejszymi/ oszacowaniami tłumienności pasmowej są liniowe kombinacje o równych współczynnikach wagowych. Przedstawiono metodę określania częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych dających najefektywniejsze oszacowania tłumienności pasmowych.

Wykazano, że na skutek występowania błędów niepewności danych punktowych występują błędy nieaddytywności oszacowań pasmowej tłumienności przy łańcuchowym łączeniu czwórników. W celu zmniejszenia prawdopodobieństwa występowania tych błędów należy stosować dla wszystkich rodzajów rozważanego zbioru czwórników homomorficzne kombinacje liniowe tłumienności punktowych i dostateczną liczbę częstotliwości ich wyznaczania.

Z przedstawionych rozważań teoretycznych wynika wniosek praktyczny, a mianowicie potrzeba ustalenia optymalnej kombinacji liniowej dla punktowej oceny tłumienności pasmowych przy każdego rodzaju pasmach przesyłowych - w celu normalizacji liczby i wartości częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych czwórników rozważanego zbioru. Materiał zawarty w referacie umożliwia wybór takiej optymalnej kombinacji liniowej przy u-

stalonej funkcji gęstości wagi w ustalonym pasmie przeszytym.

Należy jednak zauważyć, że zastosowane w niniejszym referacie kryteria optymalizacyjne przyjęto przy założeniu, iż nie występują błędy częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych. Założenie takie można przyjmować przy teoretycznych obliczeniach tłumienności, natomiast w praktyce nie jest ono zazwyczaj spełnione ze względu na niedokładność wartości stosowanych częstotliwości pomiarowych. Dlatego nasuwają się następujące pytania:

1. Jakie powinny być kryteria optymalizacyjne dla punktowych oszacowań tłumienności pasmowych w przypadku gdy niedokładne są nie tylko wartości tłumienności punktowych, lecz również i wartości częstotliwości ich wyznaczania?
2. W jaki sposób wyznaczać punktowe oszacowania tłumienności pasmowych optymalne w sensie tych nowych kryteriów?
3. Jak znajdować oszacowania suboptymalne w przypadkach gdy oszacowania optymalne nie istnieją?

Wyniki prób rozwiązania powyższych problemów autor ma zamiar przedstawić w dalszych zeszytach Referatów Problemowych Ił.

Wykaz literatury

BIBLIOTEKA
Instytutu Łączności
Nr 5-8824

1. Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1967.
2. Kowalski Z.: Pasmowe tłumienności czwórników i ortotelefoniczna tłumienność odniesienia. Referaty Problemowe Ił, zeszyt 31, 1980.
3. Kowalski Z.: Punktowe aproksymaty tłumienności pasmowej przy równomiernej gęstości wagi. Referaty Problemowe Ił, zeszyt 37, 1981.
4. Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej. PWN, Warszawa 1975.

Podziękowanie

Chciałbym wyrazić głęboką wdzięczność Panu doc. dr hab. inż. Stanisławowi Dymowskiemu za wnikliwe uwagi do pierwotnej wersji referatu, które pozwoliły uniknąć pewnych nieścisłości merytorycznych, a także zwiększyć komunikatywność ostatecznej redakcji niniejszej pracy.

D o t y c h c z a s u k a z a ł y s i ę :

1. Biało-brzeski R., Sońta S.: Zastosowanie testu chi kwadrat Pearsona do weryfikacji hipotezy statystycznej, na podstawie empirycznej gęstości prawdopodobieństwa. Grudzień 1977.
2. Blinkiewicz A., Mędrzycki B., Hutnik M., Sambierski R.: Zastosowanie pamięci kasetowej PK-1 do rejestracji danych w systemie komutacyjnym E-10. Styczeń 1978.
3. Orłowski A.: Optymalizacja układu ogranicznika dynamiki zwłaszcza dla radiofonii krótkofalowej. Luty 1978.
4. Frączek K.: Zasady opracowywania wymagań techniczno-eksploatacyjnych na urządzenia pomiarowe w resorcie łączności. Marzec 1978.
5. Biało-brzeski R., Dudziewicz J.: Minimalna częstość próbkowania sygnału losowego przy pomiarze jego mocy średniej. Marzec 1978.
6. Lewandowski W.: Wprowadzenie komutacji teledacyjnych kanałów cyfrowych w powszechnej telefonicznej sieci komutacyjnej z centralami elektronicznymi E-10. Kwiecień 1978.
7. Dudziewicz J.: Ogólne wytyczne w sprawie prowadzenia i dokumentowania prac naukowo-badawczych wykonywanych w Instytucie łączności. Kwiecień 1978.
8. Stagrowski A.: Metoda detekcji i pomiaru impulsów o maksymalnych i minimalnych czasach trwania w ciągu. Maj 1978.
9. Chamski J.: System CTI-B dla maszyny cyfrowej R-10. Maj 1978.
10. Puchalski E.: Kompensator napięcia stałego stosowany w układach do sprawdzania przetworników termoelektrycznych i mikropotencjometrów. Czerwiec 1978.
11. Kozłowski A.: Elektroniczny sygnalizator przywołania abonenta w aparacie telefonicznym CB. Wrzesień 1978.
12. Stasiński L.: Wyładowania łukowe w.cz. na izolatorach odciągów pionowych anten radiofonicznych. Październik 1978.
13. Wałaszek S.: Zastosowanie uogólnionego rozwiązania układu o trzech stanach do analizy niezawodności. Styczeń 1979.
14. Sońta S.: Aparatura automatyczna badań sieci łączący międzymiastowych systemu ABA-3. Luty 1979.

15. Godlewski P.: Język programowania badań w systemie ABA2 i ABA3. Marzec 1979.
16. Waśniewski A.: Kombinatoryczne aspekty planowania badań sieci telekomunikacyjnej za pomocą systemu ABA-3. Kwiecień 1979.
17. Brennek L., Lebedziuk B.: System edycji, przechowywania i translacji programów w języku SAWIK dla minikomputera MERA 305. Maj 1979.
18. Godlewski P.: Aparatura sterująca systemem badaniowego ABA-3 - architektura urządzenia. Czerwiec 1979.
19. Chamski J.: Centrum eksploatacji technicznej w systemie E 10. Lipiec 1979.
20. Porada M.: Komunikat o badaniach zakłóceń impulsowych w łączych telefonicznych. Sierpień 1979.
21. Sońta S.: Generacja sygnałów losowych niezależnych obciążających kanały telefoniczne. Wrzesień 1979.
22. Karwowska-Lamparska A.: Koncepcja systemu WIDEOTEKS. Październik 1979.
23. Kowalska J.: Próba eksploatacyjna automatycznej aparatury badaniowej ABA-2 - analiza wyników, wnioski. Listopad 1979.
24. Tyrowicz M.: System zdalnej rejestracji kontroli obiektów specjalnych - REKO - . Grudzień 1979.
25. Frydrych Z.: Uwagi o wymiarowaniu wiązek łączy międzycentralowych. Styczeń 1980.
26. Frydrych Z.: O niezawodności sieci telekomunikacyjnej. Luty 1980.
27. Kisło M.: Automatyzacja stacjonarnych pomiarów propagacyjnych. Marzec 1980.
28. Mieszczanek J.: Analiza i projektowanie oscylatorów kwarcowych pracujących w układzie Pierce'a-Colpitts'a. Kwiecień 1980.
29. Frydrych Z.: Niektóre problemy projektowania dróg kolejnego wyboru. Maj 1980.
30. Laube J.: Wybrane metody projektowania cyfrowych zespołów funkcjonalnych na przykładzie projektu generatora połączeń telefonicznych. Czerwiec 1980.

31. Kowalski Z.: Pasmowe tłumienności czwórników i ortotelefoniczne tłumienności odniesienia, Lipiec 1980.
32. Proga I.: Analiza i ocena odgromników zagranicznych oraz niezbędnego do nich osprzętu na podstawie badań i obserwacji w warunkach eksploatacyjnych. Sierpień 1980.
33. Godlewski P., Zejdel A.: System automatycznej kontroli obecności i ruchu załogi AKOR. Wrzesień 1980.
34. Waśniewski A.: Problem minimalizacji czasu badania sieci w systemie ABA-3. Październik 1980.
35. Kuśmirek Z.: Impedancja wewnętrzna źródła i jej pomiar. Listopad 1980 .

Biblioteka

IZ

S-8824