

# *Prawdopodobieństwo przejścia i efektywna liczba próbek cyfrowego sygnału z multipleksacją OFDM*

*Adam Rudziński*

*W artykule przedstawiono wyprowadzenie wyrażenia opisującego efektywną liczbę próbek sygnału cyfrowego z multipleksacją OFDM. Wyprowadzenie oparte jest na obliczeniu prawdopodobieństwa przejścia dla tego sygnału. Otrzymane wyrażenie wskazuje wprost zależności między efektywną liczbą próbek a parametrami sygnału i stanowi uzupełnienie modelu teoretycznego.*

*przetwornik cyfrowo-analogowy, multipleksacja OFDM, prawdopodobieństwo przejścia, efektywna liczba próbek*

## **Wprowadzenie**

Obecnie wykorzystuje się wiele różnorodnych urządzeń cyfrowych wytwarzających i przetwarzających różnego rodzaju informacje. Urządzenia te przesyłają między sobą dane, kodując je w postaci sygnałów, które przenoszone są przez obiekty fizyczne, takie jak pola czy prądy. W ostatnich latach dużą popularność zyskała technika kodowania nazywana ortogonalną multipleksacją w dziedzinie częstotliwości OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*), opracowana około 40 lat temu [1]–[3], a obecnie stosowana, np. w bezprzewodowych sieciach lokalnych WLAN czy naziemnej telewizji cyfrowej DVB-T. Metoda ta polega na kodowaniu przesyłanych danych na podnośnych o różnych częstotliwościach, które dobiera się tak, aby były one ortogonalne w przedziale czasu odpowiadającym jednemu symbolowi. Cechuje się ona odpornością na propagację wielodrogową, ale niesie ze sobą specyficzne problemy, związane np. z dużym stosunkiem mocy szczytowej do mocy średniej wytwarzanych sygnałów.

Niezbędnym etapem w transmisji jest konwersja sygnału z postaci cyfrowej (właściwej urządzeniu) do postaci analogowej (fizycznej), która dokonuje się w przetworniku cyfrowo-analogowym (C/A). Nadawany sygnał analogowy jest zbliżony do postaci idealnej, ale zawsze zawiera różnego rodzaju szumy i zniekształcenia. W szczególności, sygnał z multipleksacją OFDM podlega ograniczeniu do zakresu przetwornika [4] oraz kwantyzacji i zniekształceniu przez niedoskonałości odwzorowania poziomów przetwornika [5, 6]. Degradacja sygnału wskutek tych efektów jest zależna od jego mocy, rozdzielczości przetwornika C/A (narzucającego precyzję reprezentacji liczb), nieliniowości przetwornika C/A oraz liczby próbek sygnału. Ogólny model matematyczny uwzględniający te efekty przedstawiono w artykule [6]. Pokazano tam także, że wpływ przetwornika (tj. szum kwantyzacji i zniekształcenia nieliniowe) można zmniejszać przez zwiększanie liczby próbek sygnału (nadpróbkowanie), przy czym zniekształcenia nieliniowe podlegają zmniejszeniu tylko częściowo i zależą od zdefiniowanej w [6] efektywnej liczby próbek.

W artykule [6] efektywną liczbę próbek wyznaczano na drodze symulacji numerycznych, natomiast w tym artykule jest przedstawione wyprowadzenie przybliżonego, ale dosyć dokładnego wzoru wyrażającego tę wielkość przez parametry sygnału i przetwornika. Wyprowadzenie to opiera się na obliczeniu prawdopodobieństwa przejścia dla sygnału, tj. prawdopodobieństwa tego, że w dwóch określonych chwilach sygnał przyjmuje zadane wartości. Otrzymany wzór, co jest właściwe wyrażeniom

analitycznym, pokazuje wprost zależność od parametrów sygnału (częściowo zdeterminowanych przez przetwornik C/A) i w ten sposób stanowi kompletny opis jednego z mechanizmów występujących w zagadnieniu przetwarzania sygnałów cyfrowych do postaci analogowej.

## Definicje i założenia

Rozważany jest rzeczywisty, cyfrowy sygnał z multipleksacją OFDM, podawany na przetwornik C/A o rozdzielczości  $n$  bitów. Sygnał taki powstaje w wyniku dyskretyzacji i kwantyzacji idealnego przebiegu symbolu OFDM, utworzonego przez złożenie  $K$  zmodulowanych podnośnych:

$$x(t) = \sum_{k=1}^K A_k \cos(\omega_k t + \phi_k). \quad (1)$$

Symbole na poszczególnych podnośnych koduje się poprzez ich amplitudy  $A_k$  i fazy  $\phi_k$ , które są stałe w czasie trwania symbolu OFDM, wynoszącym  $T_S$ . Dla uproszczenia wyprowadzeń zostanie przyjęte, że  $A_k$  i  $\phi_k$  są niezależnymi zmiennymi losowymi, amplitudy  $A_k \in \mathbb{R}_+$  a ich rozkłady prawdopodobieństwa są jednakowe, fazy  $\phi_k$  zaś mają rozkład jednostajny na podzbiórze przedziału  $[0; 2\pi)$  oraz dla każdego  $k$  zachodzi  $\langle e^{j\phi_k} \rangle = \langle e^{2j\phi_k} \rangle = 0$ . Pulsacje podnośnych  $\omega_k$  dobrane są w taki sposób, aby odpowiadające im przebiegi były ortogonalne na przedziale o długości równej czasowi trwania symbolu OFDM. W wyprowadzeniach wystarczy ograniczyć się do pojedynczego symbolu OFDM. Pominięta zostaje składowa stała, która jest w przedstawionym wyprowadzeniu nieistotna; wówczas można przyjąć  $\omega_k = k\omega_1$ , gdzie  $\omega_1 = 2\pi/T_S$ . Przy przyjętych założeniach średni kwadrat  $\langle A_k^2 \rangle$  ma jednakową wartość dla każdej z podnośnych, a więc średnia moc symbolu OFDM wynosi

$$\sigma^2 = K \frac{\langle A_k^2 \rangle}{2}. \quad (2)$$

Zdyskretyzowaną postacią rozważanego symbolu OFDM jest ciąg

$$x_i \equiv x(iT), \quad i = 0, 1, \dots, N_S - 1, \quad (3)$$

gdzie:  $i$  indeksuje kolejne próbki,  $T = T_S/N_S$  jest okresem próbkowania,  $N_S$  – liczbą próbek. Gęstość dyskretyzacji (nadpróbkowanie) określa stosunek  $N_S/K$ , który – przy spełnieniu kryterium Nyquista – wynosi co najmniej 2. Sygnał  $x_i$  można z dobrym przybliżeniem traktować jako proces stochastyczny, którego próbki są niezależnymi zmiennymi losowymi. Z centralnego twierdzenia granicznego wynika, że gęstość prawdopodobieństwa przyjęcia przez próbkę wartości  $x$  dana jest rozkładem Gaussa z wariancją określoną przez średnią moc sygnału (2):

$$P(x_i = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4)$$

W urządzeniach cyfrowych liczby reprezentowane są ze skończoną dokładnością, w szczególności przetwarzanie przez przetwornik C/A o rozdzielczości  $n$  bitów najwygodniej jest modelować jako zaokrąglanie (kwantyzację) sygnału wejściowego do wartości całkowitych ze zbioru  $\mathbb{Z}_n = \{-2^{n-1}, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ , zwanych dalej poziomami. Dzięki temu sygnał wyjściowy można wprost (bez dodatkowych przeskalowań i przesunięć) porównywać z sygnałem wejściowym. Amplituda sygnału wyjściowego jest ograniczona, co powoduje ograniczanie fragmentów sygnału wejściowego przekraczających tę wartość.

Moc sygnału można odnieść do zakresu przetwornika definiując współczynnik  $\alpha = 2^{n-1}/\sigma$ . Wartość tego współczynnika określa zakres dynamiczny sygnału, a w praktyce rozsądnym wyborem jest  $\alpha \approx 4$ .

Według powyższych ustaleń, aby otrzymać cyfrową reprezentację przebiegu symbolu OFDM należy podać go kwantyzacji, która przekształca go do postaci schodkowej

$$x_i^q = x_i + \Delta_i^q, \quad \text{gdzie } x_i^q \in \mathbb{Z}_n : |x_i^q - x_i| = \min_{y \in \mathbb{Z}_n} |y - x_i|, \quad (5)$$

$\Delta_i^q$  zaś jest błędem (szumem) kwantyzacji. Prawdopodobieństwo przyjęcia tej samej wartości przez kolejne próbki sygnału cyfrowego  $x_i^q$  jest niezerowe, a jak pokazano w [6], ma to wpływ na szybkozmienną część zniekształceń nieliniowych powodowanych przez przetwornik C/A. Pokazano tam także, że część szybkozmienna tych zniekształceń zależy od efektywnej liczby próbek, zdefiniowanej jako

$$N_{\text{eff}} = \frac{N_S}{\langle L \rangle}, \quad (6)$$

gdzie  $\langle L \rangle$  jest średnią długością stałego podciągu w sygnale  $x_i^q$  (zatem  $N_{\text{eff}}$  wyraża liczbę zmian wartości próbek w przebiegu sygnału cyfrowego. W skrajnych przypadkach:  $N_{\text{eff}} = N_S$  gdy żadna próbka nie jest równa poprzedniej, a  $N_{\text{eff}} = 1$  gdy sygnał jest stały i wszystkie jego próbki mają jednakową wartość). Wygodnie jest posługiwać się znormalizowaną efektywną liczbą próbek  $N_{\text{eff}}/N_S$ , która przyjmuje wartości od  $1/N_S \approx 0$  do 1.

W artykule [6] znormalizowaną liczbę próbek wyznaczano numerycznie. Zauważono także, że wszystkie otrzymane krzywe można „dopasować”, wyrażając je w funkcji wielkości, którą można by określić jako „zredukowana rozdzielczość”

$$v = n - \log_2 \frac{N_S}{K}. \quad (7)$$

Przedstawione dalej wyprowadzenie pozwala otrzymać wzór dosyć dokładnie odtwarzający te wyniki. Jego pierwszym krokiem jest obliczenie prawdopodobieństwa przejścia dla rozważanego sygnału.

## Prawdopodobieństwo przejścia dla sygnału OFDM

Prawdopodobieństwem przejścia nazywa się prawdopodobieństwo przyjmowania przez kolejne próbki sygnału zadanych wartości. Zakładając, że właściwości statystyczne sygnału nie zmieniają się w czasie, prawdopodobieństwo przejścia dla sygnału cyfrowego  $x_i^q$  jest zdefiniowane jako

$$\mathcal{P}^q(p, p') = \mathcal{P}(x_0^q = p \wedge x_1^q = p'). \quad (8)$$

Analogicznie, dla sygnału  $x_i$ , który przyjmuje wartości ze zbioru ciągłego, zdefiniowana jest gęstość prawdopodobieństwa przejścia

$$\mathcal{P}(p_0, p_1) = \mathcal{P}(x_0 = p_0 \wedge x_1 = p_1). \quad (9)$$

Między tymi wielkościami zachodzi w oczywisty sposób związek:

$$\mathcal{P}^q(p, p') = \int_{p-\frac{1}{2}}^{p+\frac{1}{2}} dp_0 \int_{p'-\frac{1}{2}}^{p'+\frac{1}{2}} dp_1 \mathcal{P}(p_0, p_1). \quad (10)$$

Wyrażając prawdopodobieństwo koniunkcji przez prawdopodobieństwo warunkowe można napisać:

$$\mathcal{P}(p_0, p_1) = \mathcal{P}(x_1 = p_1 | x_0 = p_0) \mathcal{P}(x_0 = p_0). \quad (11)$$

Czynnik  $\mathcal{P}(x_0 = p_0)$  wyraża się wzorem (4), natomiast wyrażenie na  $\mathcal{P}(x_1 = p_1 | x_0 = p_0)$  można wyprowadzić definiując

$$w(t) = x(t) - x_0 = \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \left\{ A_k e^{j\phi_k} \left( e^{j\omega_k t} - 1 \right) \right\}. \quad (12)$$

Wówczas

$$\mathcal{P}(x_1 = p_1 | x_0 = p_0) = \mathcal{P}(w(T) = p_1 - p_0 | x_0 = p_0). \quad (13)$$

Ponieważ  $w(T)$  jest kombinacją liniową wielu niezależnych zmiennych losowych, z centralnego twierdzenia granicznego wynika, że prawdopodobieństwo przyjęcia przez  $w(T)$  określonej wartości dane jest rozkładem Gaussa:

$$\mathcal{P}(w(T) = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_w^2}\right), \quad (14)$$

przy czym wariancja

$$\sigma_w^2 = \langle w(T)^2 \rangle = 2\sigma^2 \left( 1 - \frac{\cos \frac{(K+1)\pi}{N_S} \sin \frac{K\pi}{N_S}}{K \sin \frac{\pi}{N_S}} \right) \quad (\text{wyprowadzenie w dodatku}). \quad (15)$$

Zaniedbując zależność statystyczną między  $w(T)$  i  $x_0$ , można przybliżyć szukane prawdopodobieństwo warunkowe:  $\mathcal{P}(w(T) = p_1 - p_0 | x_0 = p_0) \approx \mathcal{P}(w(T) = p_1 - p_0)$ . Wówczas:

$$\mathcal{P}(p_0, p_1) \approx \frac{1}{2\pi\sigma_w\sigma} \exp\left(-\frac{(p_1 - p_0)^2}{2\sigma_w^2}\right) \exp\left(-\frac{p_0^2}{2\sigma^2}\right), \quad (16)$$

a zatem:

$$\mathcal{P}^q(p, p') = \frac{1}{2\pi\sigma_w\sigma} \int_{p-\frac{1}{2}}^{p+\frac{1}{2}} dp_0 \exp\left(-\frac{p_0^2}{2\sigma^2}\right) \int_{p'-\frac{1}{2}}^{p'+\frac{1}{2}} dp_1 \exp\left(-\frac{(p_1 - p_0)^2}{2\sigma_w^2}\right). \quad (17)$$

Całkę po  $p_1$  można wyrazić za pomocą funkcji błędu

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}, \quad (18)$$

po czym otrzymuje się:

$$\mathcal{P}^q(p, p') = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{p-\frac{1}{2}}^{p+\frac{1}{2}} dp_0 \exp\left(-\frac{p_0^2}{2\sigma^2}\right) \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{p' - p_0 + \frac{1}{2}}{\sigma_w\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{p' - p_0 - \frac{1}{2}}{\sigma_w\sqrt{2}}\right) \right]. \quad (19)$$

Ponieważ wartość skuteczna sygnału  $\sigma \gg 1$ , można przyjąć, że przedział całkowania po  $p_0$  jest na tyle wąski, że funkcja podcałkowa jest w nim praktycznie stała, wtedy ostatecznie:

$$\mathcal{P}^q(p, p') \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma^2}\right) \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{p' - p + \frac{1}{2}}{\sigma_w \sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{p' - p - \frac{1}{2}}{\sigma_w \sqrt{2}}\right) \right]. \quad (20)$$

Wynika stąd, że wartość sygnału nie zmienia się z prawdopodobieństwem

$$\mathcal{P}^q(p, p) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sigma_w \sqrt{2}}\right). \quad (21)$$

## Efektywna liczba próbek cyfrowego sygnału OFDM

Numerycznie, efektywną liczbę próbek sygnału cyfrowego  $x_i^q$  można policzyć śledząc przebieg realizacji tego sygnału i zliczając zmiany wartości próbek. Postępowaniu takiemu odpowiada następująca definicja tej wielkości:

$$N_{\text{eff}} = \left\langle 1 + \sum_{i=1}^{N_S-1} \left(1 - \delta_{x_{i-1}^q, x_i^q}\right) \right\rangle. \quad (22)$$

Sumowane wyrazy z deltami Kroneckera przyjmują wartość 0 gdy kolejne dwie próbki są równe, przy założeniu niezmienności właściwości statystycznych sygnału, wynik takiego testu nie zależy od tego, na których próbkach zostaje on dokonany. Dlatego, korzystając z liniowości operatora wartości oczekiwanej, przy przyjętych założeniach dochodzi się do wyrażenia na znormalizowaną efektywną liczbę próbek:

$$\frac{N_{\text{eff}}}{N_S} = 1 - \left(1 - \frac{1}{N_S}\right) \langle \delta_{x_0^q, x_1^q} \rangle. \quad (23)$$

Wartość oczekiwaną  $\langle \delta_{x_0^q, x_1^q} \rangle$  można obliczyć znając prawdopodobieństwo przejścia dla sygnału cyfrowego:

$$\langle \delta_{x_0^q, x_1^q} \rangle = \sum_{p=-2^{n-1}}^{2^{n-1}-1} \mathcal{P}^q(p, p). \quad (24)$$

Wtedy:

$$\frac{N_{\text{eff}}}{N_S} \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sigma_w \sqrt{2}}\right) \left[ 2 \sum_{p=0}^{2^{n-1}} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma^2}\right) - 1 \right]. \quad (25)$$

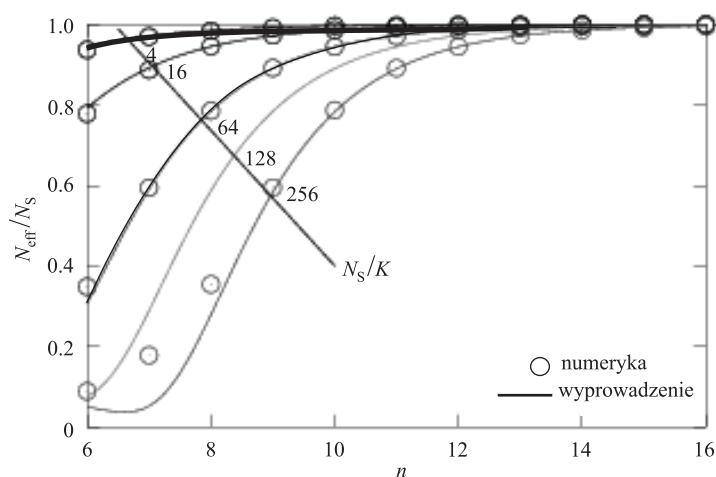
Funkcja wykładnicza pod sumą maleje na tyle powoli, że sumę po poziomach można dobrze przybliżyć przez całkę:

$$\sum_{p=0}^{2^{n-1}} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma^2}\right) \approx \int_0^{2^{n-1}} dp \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{2^{n-1}}{\sigma\sqrt{2}}\right), \quad (26)$$

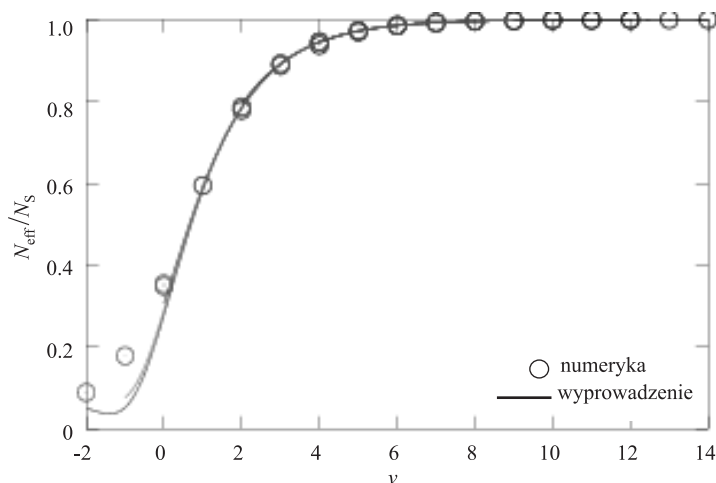
co prowadzi do wzoru w zamkniętej postaci:

$$\frac{N_{\text{eff}}}{N_S} \approx 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sigma_w \sqrt{2}}\right) \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right]. \quad (27)$$

Wyrażenie to stanowi ostateczny wynik wyprowadzenia. Jego porównanie z wynikami numerycznymi pokazane jest na rys. 1 oraz rys. 2. Jak widać, wzór ten w większości przypadków daje bardzo dobre wyniki, istotniejsze niedokładności występują jedynie przy bardzo małej rozdzielczości  $n$  połączonej z bardzo dużym nadpróbkowaniem  $N_S/K$ , co odpowiada ujemnej rozdzielczości zredukowanej  $v$ .



Rys. 1. Znormalizowana efektywna liczba próbek sygnału  $N_{\text{eff}}/N_S$  w funkcji rozdzielczości przetwornika  $n$ : porównanie wyników numerycznych z pracy [6] i wyprowadzonego wzoru (27).



Rys. 2. Znormalizowana efektywna liczba próbek sygnału  $N_{\text{eff}}/N_S$  w funkcji zredukowanej rozdzielczości przetwornika  $v$ : porównanie wyników numerycznych z pracy [6] i wyprowadzonego wzoru (27).

Wyprowadzony wzór (27) warto poddać pewnym uproszczeniom, aby można było wyraźniej zauważyć związki między różnymi parametrami. Postępowanie takie ma sens w obszarze, w którym zgodność wzoru z odtwarzanymi wynikami nie budzi zastrzeżeń, tj. przy  $v > 0$ . Powszechnie uznane jest

przyjmowanie  $\alpha \approx 4$ , a dla tej wartości  $\operatorname{erf}\left(\alpha/\sqrt{2}\right) \approx 1$ . Od  $n$  zależy tylko drugi wyraz w nawiasie, odwrotnie proporcjonalny do  $\sigma$ , czyli malejący jak  $2^{-n}$ . Wyraz ten jest mały i można go pominąć. Rozwijając funkcje trygonometryczne w wyrażeniu (15) na  $\sigma_w^2$  do dwóch pierwszych wyrazów szeregu Maclaurina, a następnie zostawiając jedynie wyraz wiodący, otrzymuje się

$$\sigma_w \approx \frac{2^n \pi}{\alpha \sqrt{3}} \left(\frac{N_S}{K}\right)^{-1} = \frac{2^v \pi}{\alpha \sqrt{3}}. \quad (28)$$

Dla małych wartości argumentu  $x$  funkcja błędu  $\operatorname{erf}(x) \approx 2x/\sqrt{\pi}$ , zatem dla  $v > 0$  dochodzi się do uproszczonego wzoru:

$$\frac{N_{\text{eff}}}{N_S} \approx 1 - \frac{\alpha \sqrt{3}}{2^n \sqrt{2\pi^3}} \frac{N_S}{K} = 1 - \frac{\alpha \sqrt{3}}{2^v \sqrt{2\pi^3}}. \quad (29)$$

Dokładność tego wzoru jest mała przy  $v \approx 0$ , ale szybko rośnie dla coraz większych  $v$ . Brak zależności od  $n$  i  $N_S/K$  innych, niż przez  $v$ , tłumaczy położenie wyników wzdłuż jednej krzywej (rys. 2).

## Podsumowanie

Wyprowadzone wyrażenie (27) umożliwia obliczenie z dużą dokładnością efektywnej liczby próbek sygnału cyfrowego z multipleksacją OFDM. Stanowi ono uzupełnienie opracowania [6], sprowadzając część zaprezentowanego tam modelu do postaci całkowicie analitycznej. Otrzymany wzór wskazuje, że błędy związane z szybkozmienną częścią zniekształceń nieliniowych w typowych przetwornikach C/A o rozdzielczościach kilkunastu bitów i większych można wydajnie zmniejszać przez zwiększanie nadpróbkowania. Jednak nie dotyczy to przetworników o mniejszych rozdzielczościach, gdyż wówczas efektywna liczba próbek jest istotnie mniejsza od liczby próbek, zatem efekty nadpróbkowania słabną. Wniosek ten może mieć pewne praktyczne znaczenie przy konstruowaniu prostych systemów, w których z uwagi na koszty, albo z innych względów, nie można zastosować typowego przetwornika C/A. Przykładem takiego systemu może być ośmiobitowy mikrokontroler z drabinką rezystorową dołączoną do wyprowadzeń jednego z jego portów (szczególnie, jeżeli tylko część wyprowadzeń portu byłaby dostępna).

## Podziękowanie

Prace nad zagadnieniami będącymi tematem artykułu były współfinansowane ze środków Programu Operacyjnego Innowacyjna Gospodarka, projekt nr POIG.01.01.02-00-014/08. Kilku cennych wskazówek udzielił dr Krzysztof Łatuszyński, za co autor składa serdeczne podziękowanie.

## Dodatek – wyprowadzenie wyrażenia (15)

Wariancję  $\sigma_w^2$  zmiennej losowej  $w(T)$  można obliczyć wykonując przytoczony poniżej rachunek. Wartość średnia  $w(T)$  zdefiniowanego wzorem (12)

$$\langle w(T) \rangle = \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \left\{ \langle A_k \rangle \langle e^{j\phi_k} \rangle \left( e^{j\omega_k T} - 1 \right) \right\} = 0, \quad (30)$$

ponieważ zgodnie z założeniem  $A_k$  i  $\phi_k$  są niezależne oraz  $\langle e^{j\phi_k} \rangle = 0$  dla każdego  $k$ . Wariancja  $\sigma_w^2$  jest zatem równa średniemu kwadratowi  $w(T)$ :

$$\sigma_w^2 = \langle w(T)^2 \rangle = \left\langle \left[ \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \left\{ A_k e^{j\phi_k} \left( e^{j\omega_k T} - 1 \right) \right\} \right]^2 \right\rangle. \quad (31)$$

Wygodnie jest kwadrat sumy rozpisać jako iloczyn sum po różnych wskaźnikach:

$$\left[ \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \left\{ A_k e^{j\phi_k} \left( e^{j\omega_k T} - 1 \right) \right\} \right]^2 = \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \left\{ A_k e^{j\phi_k} \left( e^{j\omega_k T} - 1 \right) \right\} \sum_{l=1}^K \operatorname{Re} \left\{ A_l e^{j\phi_l} \left( e^{j\omega_l T} - 1 \right) \right\}, \quad (32)$$

a ponieważ operatory sumowania części rzeczywistej oraz wartości średniej są liniowe, można poprzestawiać ich kolejność otrzymując wyrażenie:

$$\langle w(T)^2 \rangle = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \left\langle A_k e^{j\phi_k} \left( e^{j\omega_k T} - 1 \right) A_l \operatorname{Re} \left\{ e^{j\phi_l} \left( e^{j\omega_l T} - 1 \right) \right\} \right\rangle \right\}, \quad (33)$$

w którym wykorzystano, że  $A_l$  jest rzeczywiste. Warto w tym punkcie zauważyć, że dla każdego wyrazu, w którym  $l \neq k$ , ze względu na niezależność zmiennych losowych  $A_k$ ,  $A_l$ ,  $\phi_k$  i  $\phi_l$  wartość oczekiwana pod sumą jest równa iloczynowi

$$\langle A_k A_l \rangle \langle e^{j\phi_k} \rangle \left( e^{j\omega_k T} - 1 \right) \operatorname{Re} \left\{ \langle e^{j\phi_l} \rangle \left( e^{j\omega_l T} - 1 \right) \right\} = 0, \quad (34)$$

gdzie wykorzystane zostało założenie, że  $\langle e^{j\phi_k} \rangle = \langle e^{j\phi_l} \rangle = 0$ . Pozostają zatem jedynie wyrazy, w których  $l = k$ , tj.:

$$\langle w(T)^2 \rangle = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K \langle A_k^2 \rangle \left( e^{j\omega_k T} - 1 \right) \left\langle e^{j\phi_k} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\phi_k} \left( e^{j\omega_k T} - 1 \right) \right\} \right\rangle \right\}. \quad (35)$$

Następnie,  $\langle A_k^2 \rangle$  można wyznaczyć ze wzoru (2), część rzeczywistą zaś wewnątrz pozostałej wartości oczekiwanej rozpisac według wzoru  $\operatorname{Re} \{z\} = (z + z^*)/2$ , po czym daje się ona policzyć:

$$\left\langle e^{j\phi_k} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\phi_k} \left( e^{j\omega_k T} - 1 \right) \right\} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle e^{2j\phi_k} \left( e^{j\omega_k T} - 1 \right) + \left( e^{-j\omega_k T} - 1 \right) \right\rangle = \frac{1}{2} \left( e^{-j\omega_k T} - 1 \right), \quad (36)$$

co wynika z założenia, że  $\langle e^{2j\phi_k} \rangle = 0$ . Ponieważ  $\omega_k T = 2\pi k/N_S$ , otrzymuje się:

$$\langle w(T)^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{K} \sum_{k=1}^K \left| \exp \left( \frac{2\pi j k}{N_S} \right) - 1 \right|^2 = 2\sigma^2 \left( 1 - \frac{1}{K} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K \exp \left( \frac{2\pi j k}{N_S} \right) \right\} \right). \quad (37)$$

Ze wzoru na sumę  $K$  pierwszych wyrazów szeregu geometrycznego wynika:

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K \exp \left( \frac{2\pi j k}{N_S} \right) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\exp \left( \frac{(2K+1)\pi j}{N_S} \right) - \exp \left( \frac{\pi j}{N_S} \right)}{\exp \left( \frac{\pi j}{N_S} \right) - \exp \left( -\frac{\pi j}{N_S} \right)} \right\} = \frac{\sin \frac{(2K+1)\pi}{N_S} - \sin \frac{\pi}{N_S}}{2 \sin \frac{\pi}{N_S}}. \quad (38)$$



Stosując do licznika wzór na różnicę sinusów:

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \quad (39)$$

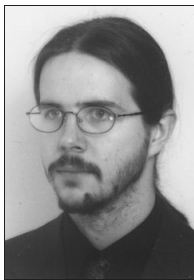
i wykorzystując tak otrzymany wynik dochodzi się do wyrażenia (15), natomiast skracając  $\sin \frac{\pi}{N_S}$  otrzymuje się jego inną formę:

$$\sigma_w^2 = \langle w(T)^2 \rangle = 2\sigma^2 \left( 1 + \frac{1}{2K} - \frac{\sin \frac{(2K+1)\pi}{N_S}}{2K \sin \frac{\pi}{N_S}} \right). \quad (40)$$

### Bibliografia

- [1] Chang R.W.: *High-speed multichannel data transmission with bandlimited orthogonal signals*. Bell Sys. Tech. J., 1966, z. 45, s. 1775–1796
- [2] Saltzberg B.R., *Performance of an efficient parallel data transmission system*. IEEE T. Commun. Technol., 1967, z. 15, s. 805–811
- [3] Weinstein S.B., Ebert P.M., *Data transmission by frequency-division multiplexing using the discrete Fourier transform*. IEEE T. Commun. Technol., 1971, z. 19, s. 628–634
- [4] Gross R., Veeneman D.: *SNR and spectral properties for a clipped DMT ADSL signal*. 1994 IEEE ICC Conf. Rec., 1994, z. 2, s. 843–847
- [5] Mehrnia A.: *Optimum DAC resolution for WMAN, WLAN and WPAN OFDM-based standards*. 2005 ICCE Dig. Techn. Papers, 2005, s. 355–356
- [6] Rudziński A., Kozłowski S.: *Wymagania na rozdzielczość i nieliniowość przetwornika C/A dla sygnału OFDM*. Telekomunikacja i Techniki Informacyjne, 2010, nr 3-4, s. 78–93

### Adam Rudziński



Dr inż. Adam Rudziński (1980) – absolwent Wydziału Elektroniki i Technik Informacyjnych Politechniki Warszawskiej (2004) oraz Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego (2009); prace naukowe i badawczo-rozwojowe w Instytucie Mikroelektroniki i Optoelektroniki PW oraz w Instytucie Radioelektroniki PW; autor lub współautor ponad 20 publikacji naukowych; zainteresowania naukowe: modelowanie układów elektronicznych i zjawisk w nich występujących, konstrukcje urządzeń elektronicznych, oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią, optyka kwantowa; praca zawodowa: projektowanie układów i urządzeń elektronicznych, aktualnie projektant w SKA Polska Sp. z o.o.

e-mail: adam.rudzinski@ire.pw.edu.pl, a.rudzinski@ska-polska.pl