INSTYTUT ŁĄCZNOŚCI

WARSZAWA-MIEDZESZYN

PROBLEMY ŁĄCZNOŚCI

85

1972

MINISTERSTWO ŁĄCZNOŚCI

PROBLEMY ŁĄCZNOŚCI

ROK 12 WARSZAWA 1972 NR 85

INSTYTUT ŁĄCZNOŚCI
Branżowy Ośrodek
Informacji Naukowo-Technicznej i Ekonomicznej

Redakcja Problemów Łączności

Redaktor Naczelny - mgr inż. Jerzy Rutkowski

Redaktorzy działów:

mgr inż. Władysław Cetner, mgr inż. Adam Moniuszko,

mgr inż. Józef Możejko

Adres Redakcji:

Instytut Łączności

Branżowy Ośrodek

Informacji Naukowo-Technicznej i Ekonomicznej

Warszawa-Miedzeszyn, ul. Szachowa 1

Redaktor: J. Borkowska Montaż tekstu: B. Drabik

Dział Wydawniczy Instytutu Łączności
Format B5. Nakład 810. Wpłynęło do
Działu Wydawniczego 13.09.1972 r.
Druk ukończono w październiku 1972 r.

PROBLEMY ŁĄCZNOŚCI

Jerzy Trechciński

WYBRANE ZAGADNIENIA WSPÓŁCZESNEJ TEORII RUCHU TELEFONICZNEGO

SPIS TREŚCI

621.395.31.001

Jerzy Trechciński

WYBRANE ZAGADNIENIA WSPÓŁCZESNEJ TEORII RUCHU TELEFONICZNEGO

1. WSTĘP

1.1. Określenia podstawowe

Ścisłe podstawy rachunku prawdopodobieństwa w pełni stworzono dopiero w pierwszej połowie XX wieku przy wykorzystaniu szeregu publikacji wielkich uczonych matematyków XVII-XIX wieku. W XX wieku zostało zapoczątkowane również wykorzystywanie probabilistyki w innych działach matematyki, naukach przyrodniczych a także w technice.

Jedną z pierwszych gałęzi techniki, w których podstawowym warunkiem rozwoju stało się wykorzystanie probabilistyki, była telefonia, a ściśle biorąc technika telekomutacyjna. Podstawowe zagadnienia telekomutacji to obsługa grup abonentów przez organa połączeniowe centrali telefonicznej. Rozwiązanie zagadnień występujących w tym przypadku wymagało sięgnięcia do probabilistyki. W ten sposób powstała teoria ruchu telefonicznego. Podstawowe zasady tej teorii sformułował na początku bieżącego stulecia duński uczony A.K. Erlang /1879-1929/.

Istotne walory teorii ruchu telefonicznego doprowadziły do wykorzystania jej podstaw do nowych gałęzi probabilistyki, a przede wszystkim do tzw. "teorii kolejek" /theory of queues/ zgodnie z nazwą przyjętą przez naukowców anglo-amerykańskich lub "teorii masowej obsługi" zgodnie z nazwą przyjętą przez naukowców radzieckich.

W niniejszym opracowaniu podanych zostało szereg określeń używanych w teorii masowej obsługi, w zastosowaniu do ruchu telefonicznego.

Ruch telefoniczny obsługiwany przez telefoniczne urządzenia komutacyjne jest generowany przez abonentów dołączonych do tego urządzenia komutującego. Abonenci ci stanowią - w ujęciu teorii masowej obsługi - źródła ruchu telefonicznego.

Średnie natężenie ruchu telefonicznego mierzy się średnią liczbą jednocześnie występujących połączeń telefonicznych w danym okresie czasu. W ujęciu teorii masowej obsługi mówimy w tym przypadku o zgłoszeniach. Średnia liczba generowanych w danym okresie czasu zgłoszeń wyraża średnie natężenie ruchu generowanego. Natomiast średnia liczba obsługiwanych zgłoszeń w danym okresie czasu wyraża średnie natężenie ruchu załatwianego. Wartość natężenia ruchu telefonicznego podaje się od uchwały CCIF w Montreux w 1964 r. w erlangach, przy czym średnie natężenie ruchu wyraża się średnią liczbą jednoczesnych zgłoszeń. Przyjmuje się jako normalny czas obserwacji 1 godzinę i, jeżeli średnia liczba zgłoszeń w tym czasie jest równa jedności, to wartość natężenia ruchu wynosi 1 erl. Dodajmy dla przykładu, że jeden aparat obsługi /organ połączeniowy, łącze/ może być wzięty nieprzerwanie do pracy przez całą godzinę i wtedy załatwia

...m ruch o natężeniu 1 erl., która to wartość jest największa możliwa w przypadku tego jednego aparatu.

Ruch telefoniczny cechuje się niejednokrotnie niestałością wartości natężenia. Jeżeli wyodrębnimy okres czasu 60 następujących po sobie minut, w których występuje największe natężenie ruchu w ciągu całej doby, to okres taki nazywamy godziną największego ruchu - GNR. Do w ten sposób zdefiniowanej GNR, w której występują najtrudniejsze warunki obsługi zgłoszeń generowanych przez abonentów, odnosimy tzw. jakość załatwiania ruchu.

Jakość załatwiania ruchu - jakość obsługi zgłoszeń - /franc. "qualité d'ecoulement du trafic", ang. "grade of service"/, nazywana poprzednio w polskiej literaturze technicznej sprawnością usługową, jest miarą dobroci urządzenia telekomutacyjnego. Do określania jakości załatwiania ruchu urządzenia telekomutacyjnego obecnie używa się niejednokrotnie tzw. współczynnika natłoku. Współczynnik natłoku wyraża się stosunkiem czasu, w którym nie występuje możliwość obsługiwania dalszych zgłoszeń do całkowitego czasu obserwacji. Zgłoszenia pojawiające się w momentach natłoku mogą być bądź natychmiast odrzucone /w przypadku systemu ze stratami/, bądź gdy obsługa nie może rozpocząć się w momencie ich pojawienia się, mogą oczekiwać na obsługę /w systemie z oczekiwaniem/.

Prawdopodobieństwo strat /współczynnik strat/ wyraża się stosunkiem liczby zgłoszeń, które nie mogą być obsługiwane i zostają wskutek tego odrzucone do liczby wszystkich zgłoszeń wprowadzanych do systemu obsługi.

Prawdopodobieństwo oczekiwania wyraża się stosunkiem liczby zgłoszeń, których obsługa nie może się rozpocząć w momencie ich pojawiania się, a musi być odpowiednio opóźniona do liczby wszystkich zgłoszeń generowanych przez źródła ruchu w danym systemie obsługi.

Zarówno źródła ruchu jak i aparaty obsługi tworzą niejednokrotnie zbiory skojarzone ze sobą w jednym systemie obsługi. Zgłoszenia generowane przy tym przez jeden zbiór źródeł ruchu obsługiwane są przez odpowiedni zbiór aparatów obsługi. Dotychczas taki zbiór źródeł ruchu nazywany był w teorii ruchu telefonicznego najczęściej grupą abonentów lub w innych przypadkach wiązką łączy przyjściowych. Zbiór aparatów obsługi może być grupą organów połączeniowych, rejestrów, cechowników lub wiązką łączy wyjściowych.

W teorii ruchu telefonicznego bardzo istotnym pojęciem jest niejednokrotnie tak zwana obciążalność ruchowa wiązki, czyli inaczej mówiąc największe średnie natężenie ruchu - największe średnie natężenie strumienia zgłoszeń - podawanego do danego systemu obsługi/do zbioru aparatów obsługi/, przy którym zachowana jest założona jakość obsługi zgłoszeń.

Dostęp do aparatów obsługi może być zagwarantowany przy różnych warunkach.

Pełna dostępność między źródłami ruchu i aparatami obsługi, nazywana w telekomutacji wyborem nieuwarunkowanym, oznacza, że warunkiem rozpoczęcia obsługi pojawiającego się zgłoszenia jest jedynie swoboda aparatu obsługi.

Ograniczona dostępność między źródłami ruchu i aparatami obsługi, nazywana w telekomutacji wyborem uwarunkowanym, oznacza, że warunkiem rozpoczęcia obsługi pojawiającego się zgłoszenia nie jest jedynie swoboda aparatu obsługi, a występują również dodatkowe czynniki warunkujące możliwość obsługiwania zgłoszenia. Jeżeli dane źródło ruchu może być obsługiwane tylko przez część aparatów obsługi, to dodatkowym warunkiem obsługiwania zgłoszeń jest możliwość obsługiwania danego źródła ruchu przez dany aparat obsługi /dostępność danego łącza wiązki przyjściowej do wybranego łącza wiązki wyjściowej/. Podobny przypadek ograniczenia obsługi występuje wtedy, gdy droga od źródła ruchu do aparatów obsługi wiedzie przez ogniwa pośrednie /komutacja poprzez układ wielosekcyjny z łączami pośrednimi/. W tym przypadku dodatkowym warunkiem obsłużenia zgłoszenia jest również swoboda odpowiedniego ogniwa pośredniego.

W przypadku obsługi w warunkach ograniczonej dostępności bardzo istotnym parametrem jest wielkość tej dostępności, która jest zwykle mniejsza od liczby aparatów obsługi, wchodzących w skład danego zbioru. Różne struktury systemów obsługi wpływają decydująco na przebieg tej obsługi oraz obciążenie poszczególnych aparatów obsługi. Przykładem może być tzw. wybieranie kolejnościowe, przy którym zgłoszenie jest realizowane przez aparaty obsługi w pewnej stałej kolejności. Wybieranie przypadkowe odnosi się z kolei do systemu obsługiwania pojawiającego się zgłoszenia przez dowolny swobodny aparat obsługi. Wybór grupowy rozumie się jako obsługę zgłoszenia przez zbiór aparatów obsługi, a wybór indywidualny jako obsługę zgłoszenia przez pojedynczy aparat obsługi.

Podkreślmy tu jeszcze raz, że przebiegiem inicjującym ruch telefoniczny - obsługę zgłoszeń - jest pojawienie się zgłoszenia, co odpowiada również pojęciu zapotrzebowania na obsługę. Jak już stwierdzono wyżej, obsłużenie pojawiającego się zgłoszenia może rozpocząć się natychmiast lub też może rozpocząć oczekiwanie na początek obsługi. Kiedy zgłoszenie oczekuje na obsługę, nazywane jest zgłoszeniem oczekującym lub zgłoszeniem o opóźnionym początku obsługi lub też krócej - zgłoszeniem opóźnionym.

Zgłoszenia, które nie zostają przyjęte do obsługi i zostają przez system obsługi odrzucone nazywają się zgłoszeniami straconymi. Zgłoszenia przyjęte do obsługi są przez dany aparat obsługi załatwiane. W momencie zakończenia obsługi danego zgłoszenia następuje zanik zgłoszenia /w telefonii używa się pojęcia - zakończenie rozmowy/. W ujęciu teorii masowej obsługi czas od chwili pojawienia się zgłoszenia do momentu zaniku zgłoszenia nazywa się czasem trwania zgłoszenia. Na ten czas może się składać i czas opóźnienia zgłoszenia i czas obsługi zgłoszenia.

Zbiór źródeł ruchu, który powoduje pojawienie się zgłoszeń w rozpatrywanym okresie czasu podaje do aparatów obsługi strumień zgłoszeń. Strumień zgłoszeń podawany do systemu obsługi nazywa się wchodzącym strumieniem zgłoszeń i oznacza strumień zgłoszeń przyjęty do obsługi. Można też mówić o załatwianym strumieniu zgłoszeń i straconym strumieniu zgłoszeń.

1.2. Strumień zgłoszeń

W początkowych pracach, na których opiera się zastosowanie teorii rachunku prawdopodobieństwa do matematycznego ujęcia zagadnienia ruchu telefonicznego, duński matematyk A.K. Erlang [1] wprowadza strumień zgłoszeń opisany za pomocą wzoru Poissona dla procesu sygnałowego.

W rozważaniach Erlanga występuje podstawowy wzór w następujący postaci:

$$P_x/t/ = \frac{/\lambda t/^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

słuszny dla $x = 0, 1, \ldots$ oraz $\lambda > 0$,

gdzie:

$P_x/t/$ - prawdopodobieństwo, że w czasie o długości t pojawi się x zgłoszeń,

λ - przeciętna liczba zgłoszeń pojawiających się w jednostce czasu, tzn. intensywność zgłoszeń.

Podany wzór otrzymano na skutek wprowadzenia przez Erlanga następujących założeń:

- w elementarnym odcinku czasu Δt może się pojawić najwyżej jedno zgłoszenie,
- prawdopodobieństwo pojawiania się zgłoszeń w omawianym elementarnym odcinku czasu jest proporcjonalne do tego czasu,
- prawdopodobieństwa pojawiania się zgłoszeń w różnych elementarnych odcinkach czasu są wzajemnie niezależne.

W dalszych pracach nad teorią ruchu telefonicznego /Jensen [1]/ i teorią masowej obsługi /Chińczyn [6] /, omawiany poissonowski proces wejścia został dokładnie opisany [1], [4], [5] i nazwany strumieniem najprostszym [6].

Opierając się na założeniach Erlanga otrzymujemy prawdopodobieństwo niepojawiania się zgłoszeń w przedziale czasu o długości t lub inaczej mówiąc prawdopodobieństwo, że odstęp czasu między kolejnymi zgłoszeniami jest większy niż czas t w następującej postaci:

$$P_o/t/ = e^{-\lambda t}$$

Prawdopodobieństwo natomiast pojawiania się zgłoszeń w przedziale czasu o długości t wyraża się:

$$P_{>o}/t/ = 1 - P_o/t/ = 1 - e^{-\lambda t}$$

Wyrażenie to podaje również prawdopodobieństwo, że odstęp czasu między kolejnymi zgłoszeniami jest mniejszy od czasu t. Dla $t \geq 0$ można interpretować je jako dystrybuantę zmiennej losowej odstępu czasu między zgłoszeniami.

W celu dalszego scharakteryzowania przebiegu dodajmy, że gęstość omawianej zmiennej losowej, to znaczy prawdopodobieństwo, że odstęp czasu między kolejnymi zgłoszeniami w tym strumieniu zgłoszeń zawiera się w przedziale /t, t + Δ t/ może być wyrażone:

$$p/t/ = \frac{d}{dt}\left[P_{>o}/t/\right] = \lambda e^{-\lambda t}$$

Niejednokrotnie związek między dystrybuantą a gęstością zmiennej losowej podawany jest w postaci:

$$P_{>o}/t/ = \int_0^t p/\tau/ \,.\, d\tau$$

Przeciętny odstęp między kolejnymi pojawiającymi się zgłoszeniami może być obliczony w oparciu o daną gęstość zmiennej losowej odstępu czasu między zgłoszeniami przy wykorzystaniu wzoru:

$$E/t/ = \int_0^{\infty} t \, . \, p/t/ \, . \, dt = \frac{1}{\lambda}$$

Wynik tego ostatniego obliczenia jest oczywisty, jeżeli weźmiemy pod uwagę, że λ jest intensywnością zgłoszeń.

Jeżeli z kolei przystąpi się do rozważenia prawdopodobieństwa pojawienia się jednego zgłoszenia w przedziale czasu $/0, t + \Delta t/$, to najpierw można ten przedział podzielić na dwa: $/0, t/$ oraz $/t, t + \Delta t/$. W tej sytuacji ogólne prawdopodobieństwo pojawiania się zgłoszenia będzie się składało z prawdopodobieństwa pojawienia się omawianego zgłoszenia w pierwszym okresie czasu i niepojawienia się wtedy zgłoszenia w drugim okresie czasu oraz prawdopodobieństwa pojawienia się zgłoszenia w drugim okresie czasu, jeżeli nie pojawiło się ono w pierwszym okresie czasu. Dokładniej mówiąc chodzi o prawdopodobieństwo pojawienia się zgłoszenia w czasie o długości t i niepojawienia się zgłoszenia w czasie o długości Δt oraz prawdopodobieństwo niepojawienia się zgłoszenia w czasie o długości t i prawdopodobieństwo pojawienia się zgłoszenia w czasie Δt. Zgodnie z założeniem wyjściowym Erlanga w czasie o przedziale Δt może się pojawić najwyżej jedno zgłoszenie.

Przeprowadzając odpowiednią operację matematyczną otrzymujemy wyrażenie:

$$P_1/t/ = \lambda t \, . \, e^{-\lambda t}$$

Wyrażenie to jest szukanym prawdopodobieństwem pojawienia się jednego zgłoszenia w czasie o długości t.

Z kolei rozważając prawdopodobieństwo pojawienia się dwóch zgłoszeń i biorąc pod uwagę, że w przedziale o długości t mogą wystąpić dwa zgłoszenia, a w przedziale o długości Δt nie wystąpi wcale zgłoszenie lub że wystąpi po jednym zgłoszeniu w przedziale o długości t i w przedziale o długości Δt, prawdopodobieństwo pojawienia się dwóch zgłoszeń w przedziale o długości t wyraża się następującym wzorem:

$$P_2/t/ = \frac{/\lambda t/^2}{2!} e^{-\lambda t}$$

Podobnie przy określeniu prawdopodobieństwa pojawienia się trzech zgłoszeń można brać pod uwagę, że te trzy zgłoszenia wystąpią w przedziale o długości t przy jednoczesnym niewystąpieniu zgłoszeń w przedziale o długości Δt lub też w przedziale o długości t wystąpią dwa zgłoszenia i jedno zgłoszenie w przedziale o długości Δt. Otrzymujemy wyrażenie:

$$P_3/t/ = \frac{/\lambda t/^3}{3!} e^{-\lambda t}$$

dla określenia prawdopodobieństwa pojawienia się trzech zgłoszeń w przedziale czasu o długości t.

Rozważania nasze kończymy wzorem-prawdopodobieństwa pojawienia się w omawianym strumieniu w przedziale czasu o długości t "N" zgłoszeń, które może być zapisane w postaci:

$$P_N/t/ = \frac{/\lambda t/^N}{N!} e^{-\lambda t}$$

1.3. Czas obsługi

A.K. Erlang bardzo szczegółowo rozważał różne możliwości rozkładu czasu trwania połączeń telefonicznych. W najprostszym przypadku rozkład prawdopodobieństwa czasu trwania rozmowy, czyli tzw. czasu obsługi zgłoszenia może być wyrażony w sposób przybliżony funkcją wykładniczą:

$$P/>t/ = e^{-\frac{t}{h}}$$

gdzie h - przeciętny czas obsługi.

Powyższe wyrażenie jest prawdopodobieństwem, że czas obsługi zgłoszenia będzie większy niż czas t.

Gęstość zmiennej losowej czasu obsługi, to znaczy prawdopodobieństwo, że czas obsługi zawiera się w przedziale $/t, t + \Delta t/$ wyraża się jako:

$$p/t/ = \frac{1}{h} e^{-\frac{t}{h}}$$

Na wstępie podane wyrażenie w przypadku prawdopodobieństwa czasu obsługi większego niż $t + \Delta t$ jest następujące:

$$P/>t + \Delta t/ = e^{-\frac{t + \Delta t}{h}}$$

W dalszym ciągu może być teraz rozpatrzone prawdopodobieństwo warunkowe trwania obsługi co najmniej przez czas o długości Δt, gdy już przedtem wystąpił czas obsługi o długości t. W wyniku obliczenia prawdopodobieństwo czasu większego od Δt, pod warunkiem, że miał już miejsce czas t, wyraża się:

$$P/>\Delta t|t/ = e^{-\frac{\Delta t}{h}}$$

Bardzo istotne jest to, że obliczone prawdopodobieństwo warunkowe nie jest zależne od czasu t. W tej sytuacji prawdopodobieństwo jednoczesnego trwania x procesów obsługi co najmniej przez okres Δt /gdy przedtem miał już miejsce czas obsługi równy t/, jeżeli te procesy obsługi są niezależne od siebie, może być wyrażone:

$$P_x/>\Delta t \; t/ = e^{-x\frac{\Delta t}{h}}$$

Z kolei możemy stwierdzić, że prawdopodobieństwo zakończenia jednego procesu obsługi spośród x w czasie Δt wyrazi się:

$$P_x/\Delta t/ = 1 - P_x/>\Delta t|t/ = 1 - e^{-x\frac{\Delta t}{h}}$$

Po przeliczeniach i rozłożeniu wyrażenia na szereg potęgowy, gdy jednocześnie weźmiemy pod uwagę, że $/\Delta t/^2$, $/\Delta t/^3$... są w tym przypadku, gdy $\Delta t \to 0$, małymi wyższego rzędu; ostateczne wyrażenie może być podane w postaci:

$$P_x/\Delta t/ = \frac{x\Delta t}{h}$$

Znamiennym jest tu fakt, że prawdopodobieństwo zakończenia czasu obsługi jest proporcjonalne do czasu obserwacji Δt.

1.4. Określenie stanu układu

W omawianym przypadku chodzi o określenie prawdopodobieństwa zaistnienia pewnego stanu układu, to znaczy prawdopodobieństwa, że w układzie, w którym następuje obsługa zgłoszeń, obsłudze podlega w przedziale czasu /t, t + Δ t/ jednocześnie x zgłoszeń.

Do rozwiązania tego zadania wykorzystuje się określone poprzednio prawdopodobieństwa pojawiania się i zanikania zgłoszeń /kończenia obsługi zgłoszeń/. Bierze się przy tym pod uwagę przebiegi występujące w poprzednim przedziale czasu /nazwijmy go: 0,t/ oraz w rozpatrywanym przedziale czasu /t, t + Δ t/. Stan obsługi x zgłoszeń w rozpatrywanym przedziale czasu wyraża się przy tym jako suma prawdopodobieństw.

Stan obsługiwania x zgłoszeń w przedziale czasu /t, t + Δ t/ może mieć miejsce wtedy, gdy w przedziale /0, t/ występuje x-1 obsługiwanych zgłoszeń, a w przedziale /t, t + Δ t/ pojawi się jedno zgłoszenie. Inny przypadek obsługiwania jednocześnie x zgłoszeń w omawianym czasie może mieć miejsce, gdy w przedziale /0, t/ obsługiwanych było x+1 zgłoszeń, a w czasie /t, t + Δ t/ obsługa jednego z tych zgłoszeń została zakończona. Może mieć miejsce i trzeci przypadek, że w czasie /0, t/ istniało x zgłoszeń, a w czasie /t, t + Δ t/ nie nastąpiło ani pojawienie się nowego zgłoszenia, ani też zakończenie obsługi żadnego ze zgłoszeń. W takim ujęciu prawdopodobieństwo stanu x w czasie o długości Δt wyrażone być może jako odpowiednia suma prawdopodobieństw. Po odpowiednich przeliczeniach otrzymujemy ciąg wyrażeń:

$$P_1 \frac{1}{h} = P_o \lambda$$

$$P_2 \frac{2}{h} = P_1 \lambda$$

$$P_3 \frac{3}{h} = P_2 \lambda \quad \text{i td.}$$

Ogólna postać wyrażenia przedstawia się następująco:

$$P_x \frac{x}{h} = P_{x-1} \cdot \lambda$$

Otrzymane wyrażenie, które podaje zależność między prawdopodobieństwem stanu x /to znaczy jednoczesnego wystąpienia x procesób obsługi/ i stanu x-1, zostało podane również w rozważaniach Erlanga [1] w oparciu o tzw. zasadę równowagi statycznej. Zasada ta stwierdza, że stacjonarne prawdopodobieństwa przejścia układu ze stanu x do stanu x-1 są równe prawdopodobieństwu zmiany stanu układu w kierunku odwrotnym.

1.5. Typowe modele obsługi zgłoszeń

Zasadnicze rozwiązania obsługi zgłoszeń to obsługa ze stratami lub obsługa z oczekiwaniem. Obsługa ze stratami to taka obsługa, przy której wszystkie zgłoszenia pojawiające się w momencie wzięcia do pracy wszystkich aparatów obsługi zostają stracone. Przez system obsługi obsługiwane są tylko te zgłoszenia, które pojawiają się w okresach, gdy co najmniej jeden aparat obsługi jest swobodny. Suma prawdopodobieństw możliwych stanów wzięcia do pracy od 0 do N aparatów obsługi w danym systemie obsługi wyraża się:

$$P_o + P_1 + \ldots + P_{N-1} + P_N = 1$$

Obsługa z oczekiwaniem to taka obsługa, przy której w momencie wzięcia do pracy wszystkich aparatów obsługi dalsze pojawiające się zgłoszenia oczekują i podlegają obsługiwaniu po zwolnieniu odpowiedniego aparatu obsługi. Obsługa z oczekiwaniem niejednokrotnie może być rozpatrywana z założeniem teoretycznie nieograniczonego czasu oczekiwania.

W praktyce jednak często, zarówno liczba oczekujących jak i czas oczekiwania są ograniczone.

W podstawowych układach obsługi zasadniczymi parametrami charakterystycznymi są:

liczba źródeł ruchu - S,

liczba aparatów obsługi - N,

intensywność zgłoszeń zbioru źródeł ruchu - λ,

średni czas obsługi zgłoszenia - h oraz

średnie natężenie ruchu generowanego - Λ.

W przypadku obsługi zgłoszeń ze stratami może być rozpatrywany układ, w którym zarówno S jak i N przyjmują wartości ograniczone, a przy tym $S \gg N$. Intensywność zgłoszeń grupy źródeł ruchu jest w tym układzie zmienna i maleje wraz ze wzrostem liczby aktualnie obsługiwanych zgłoszeń.

Drugim istotnym przypadkiem, który może być tu rozpatrywany, jest przypadek $S \gg N$. Przyjmuje się przy tym teoretycznie, że S jest nieskończenie duże. W tym przypadku intensywność zgłoszeń grup źródeł ruchu jest stała i nie zależy od liczby aktualnie obsługiwanych zgłoszeń.

W stosunku do tych dwóch podstawowych założeń mogą występować dalsze modyfikacje w kierunku przypadków krańcowych. Jednym z nich jest przypadek, kiedy przy ograniczonych wartościach S oraz N, $S \leqslant N$. Inny natomiast przypadek ma miejsce, gdy poza nieskończoną wartością S przyjmuje się też nieskończoną wartość N. Te dwa ostatnie przypadki charakteryzują się praktycznie brakiem strat w układzie, lecz oczywiście z różnych przyczyn. W przypadku gdy $S \leqslant N$ dopiero przy największej liczbie S zgłoszeń zajęte są wszystkie aparaty obsługi albo też pozostają jeszcze jakieś aparaty swobodne. W przypadku gdy N jest nieograniczone, każda dowolna liczba zgłoszeń /choć przy nieograniczenie dużym S/ znajduje swobodne aparaty obsługi.

Podkreślmy jeszcze, że dwa podstawowe przypadki, w których $S > N$ i w których S jest bądź wartością ograniczoną, bądź nieograniczoną, rozpatrywane mogą być również dla przypadku ruchu z oczekiwaniem. W pierwszym przypadku, gdzie intensywność zgłoszeń maleje wraz z ilością obsługiwanych zgłoszeń, również bardziej maleje prawdopodobieństwo oczekiwania w stosunku do przypadku drugiego, gdy intensywność od liczby obsługiwanych zgłoszeń nie zależy.

Wprowadźmy tu jeszcze dalsze parametry charakterystyczne, a przede wszystkim pojęcie tzw. natężenia ruchu załatwianego - A_z. W przypadku ruchu ze stratami lub z oczekiwaniem lub częściowymi stratami wielkość A_z jest mniejsza od wielkości A. Różnicą pomiędzy tymi wielkościami jest ruch tracony - $A \cdot B$, gdzie: B - - współczynnik strat. Zgodnie z podaną tu definicją B wyraża się więc:

$$B = \frac{A - A_z}{A}$$

W przypadku ruchu z oczekiwaniem i bez strat wartość natężenia ruchu załatwianego A_z jest równa wartości natężenia ruchu generowanego A.

W systemie ruchu ze stratami może być niejednokrotnie podawana jako wyjściowa wartość natężenia ruchu załatwianego - A_z. Wtedy natężenie ruchu generowanego wyraża się:

$$A = \frac{A_z}{1-B} = \frac{1}{1-B} \cdot A_z$$

Natomiast natężenie ruchu traconego mogłoby być wtedy wyrażone w postaci:

$$A \cdot B = \frac{B}{1-B} \cdot A_z$$

Wielkości współczynników $\frac{1}{1-B}$ i $\frac{B}{1-B}$ w zależności od B są następujące:

B	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$\frac{1}{1-B}$	1,01	1,053	1,11	1,25	1,43	1,67	2,00
$\frac{B}{1-B}$	0,01	0,053	0,11	0,25	0,43	0,67	1,00

Weźmy teraz pod uwagę przypadek ograniczonej liczby źródeł ruchu S i obsługiwania zgłoszeń generowanych przez te źródła ruch przez N aparatów obsługi. Średnie natężenie ruchu generowanego może być wyrażone wtedy w sposób następujący:

$$A = \sum_{i=o}^{N} \frac{A_o}{S} /S-i/ . P_i = A_o \sum_{i=o}^{N} P_i - \frac{i . P_i}{S} =$$

$$= A_o \sum_{i=o}^{N} P_i - \frac{A_o}{S} \sum_{i=o}^{N} i . P_i$$

gdzie P_i - prawdopodobieństwo dowolnego stanu i w systemie obsługi

A_o - fikcyjne natężenie ruchu o stałej wartości

Zgodnie z wyżej podanymi założeniami:

$$\sum_{i=o}^{N} P_i = 1 \quad \text{a} \quad \sum_{i=o}^{N} i . P_i = A_z$$

Zgodnie z definicją o średnim natężeniu ruchu, średnie natężenie ruchu powinno być mierzone średnią liczbą jednocześnie obsługiwanych zgłoszeń w danym okresie czasu, co właściwie podają poszczególne iloczyny ww. sumy. W tej sytuacji otrzymujemy wyrażenia

$$A = A_o - \frac{A_o}{S} A_z = \frac{A_o}{S} /S-A_z/$$

$$B = \frac{A - A_z}{A} = 1 - \frac{S . A_z}{A_o . /S-A_z/}$$

2. UKŁAD ZE STRATAMI ZGŁOSZEŃ W PRZYPADKU PEŁNEJ DOSTĘPNOŚCI DO APARATÓW OBSŁUGI

2.1. Rozkład Erlanga

W rozkładzie Erlanga rozpatrywany jest przypadek przy założeniu nieograniczenie dużej liczby źródeł ruchu S i ograniczonej liczby N aparatów obsługi. Zostaje obsłużone każde zgłoszenie pojawiające się w okresie, w którym choć jeden aparat obsługi jest swobodny, a więc w okresie, kiedy w systemie obsługi nie występuje natłok. Każde natomiast zgłoszenie, które pojawia się w okresie występowania natłoku w danym systemie obsługi, zostaje natychmiast odrzucone. Omawiany system obsługi zrealizowany jest w założeniu pełnej dostępności źródeł ruchu do aparatów obsługi, co oznacza, że każde zgłoszenie może być obsłużone teoretycznie przez każdy swobodny aparat obsługi. W danym systemie obsługi może praktycznie biorąc występować tylko N+1 stanów:

- stan "0", kiedy żadne zgłoszenie nie jest obsługiwane przez jakikolwiek spośród N aparatów obsługi; stanowi temu przyporządkowujemy prawdopodobieństwo "P_o";
- stan "1", kiedy jedno tylko zgłoszenie obsługiwane jest przez jeden spośród N aparatów obsługi; stanowi temu przyporządkowujemy prawdopodobieństwo "P_1";
- stan "2", kiedy dwa zgłoszenia obsługiwane są przez dwa spośród N aparatów obsługi; stanowi temu przyporządkowujemy prawdopodobieństwo P_2,

i td.

- stan "N-1", kiedy N-1 zgłoszeń obsługiwanych jest przez N-1 spośród N aparatów obsługi; stanowi temu przyporządkowujemy prawdopodobieństwo P_{N-1};
- stan "N", kiedy N zgłoszeń obsługiwanych jest przez wszystkie N aparatów obsługi. Stanowi temu przyporządkowujemy prawdopodobieństwo P_N.

Prawdopodobieństwa te powiązane są następującą zależnością:

$$P_o + P_1 + \dots + P_{N-1} + P_N = 1$$

Z powyżej podanych równań stanów wynika, że

$$P_x \cdot \frac{x}{h} = P_{x-1} \cdot \lambda$$

Biorąc pod uwagę, że w danym przypadku $\lambda \cdot h$ równa się średniemu natężeniu ruchu A, możemy napisać następującą zależność:

$$P_x = \frac{A}{x} \cdot P_{x-1}$$

W tej sytuacji otrzymujemy, po dokonaniu obliczeń, równanie:

$$P_o + \frac{A}{1!} \cdot P_o + \frac{A^2}{2!} P_o + \dots + \frac{A^N}{N!} P_o = 1$$

Zależność ta pozwala na zapisanie wyjściowej wartości prawdopodobieństwa P_o w postaci:

$$P_o = \frac{1}{1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^x}{x!} + \dots + \frac{A^N}{N!}} = \frac{1}{\sum_{i=o}^{N} \frac{A^i}{i!}}$$

Z odpowiednich przeliczeń otrzymujemy wzór ogólny prawdopodobieństwa obsługi x zgłoszeń w danym systemie obsługi w postaci:

$$P_x = \frac{\frac{A^x}{x!}}{\sum_{i=o}^{N} \frac{A^i}{i!}}$$

Przypadek natłoku w danym systemie obsługi występuje wtedy, gdy ma miejsce obsługa N zgłoszeń, co oznacza, że prawdopodobieństwo występowania natłoku E jest równe prawdopodobieństwu jednoczesnego istnienia w danym systemie obsługi N procesów obsługi:

$$E = P_N = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=o}^{N} \frac{A^i}{i!}}$$

W omawianym przypadku prawdopodobieństwo natłoku jest również prawdopodobieństwem strat, które podane w postaci:

$$E_{1,N}/A/ = \frac{\frac{A^N}{N!}}{1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots + \frac{A^N}{N!}}$$

znane jest jako pierwszy wzór Erlanga. Wzór ten ujmuje zależność między prawdopodobieństwem natloku /strat/ $E_{1,N}/A/$, średnią wielkośćią generowanego strumienia zgłoszeń A oraz liczbą aparatów obsługi N w warunkach pełnej dostępności źródeł ruchu do aparatów obsługi. Podkreślmy z kolei, że średnie natężenie strumienia zgłoszeń obsługiwanego przez dany system obsługi może być określone w postaci:

$$A_z = A\left[1 - E_{1,N}/A/\right]$$

Wartość $A \cdot E_{1,N}/A/$ wyraża stracony strumień zgłoszeń. Jak już podano poprzednio, gdy podany jest załatwiany strumień zgłoszeń A_z, to strumień generowany może być określony wg zależności:

$$A = \frac{A_z}{1 - E_{1,N}/A/}$$

a stracony strumień zgłoszeń:

$$A_p = \frac{E_{1,N}/A/}{1 - E_{1,N}/A/} \cdot A_z$$

2.2. Rozkład Engseta

W przypadku rozkładu Engseta założono, że liczba S źródeł ruchu jest ograniczona i przy tym S > N.

Każde zgłoszenie pojawiające się w okresie, w którym choć jeden aparat obsługi jest swobodny, a więc w okresie, kiedy nie występuje natłok w systemie obsługi, zostaje obsłużone. Każde natomiast zgłoszenie pojawiające się w okresie występowania natłoku w danym systemie obsługi zostaje odrzucone. Omawiany system obsługi zrealizowany jest w założeniu pełnej dostępności źródeł ruchu do aparatów obsługi, co oznacza, że każde zgłoszenie może być obsłużone teoretycznie przez każdy swobodny aparat obsługi. W danym systemie obsługi, praktycznie biorąc, występuje N+1 stanów, tak samo jak to miało miejsce przy wyżej wspomnianym rozkładzie Erlanga. Występuje więc również i tu zależność

$$P_o + P_1 + \ldots + P_{N-1} + P_N = 1$$

Biorąc pod uwagę, że w danym przypadku średnie natężenie ruchu w poszczególnych stanach układu obsługi jest zależne od liczby obsługiwanych zgłoszeń, zgodnie z zależnością

$$A = \frac{A_o}{S} \cdot /S - i/$$

można napisać następującą równość:

$$P_x = \frac{A_o}{S} \cdot \frac{S - x}{x} \cdot P_{x-1}$$

Otrzymujemy więc z kolei po przeliczeniach następujące wyrażenie:

$$C_S^o \cdot P_o + C_S^1 \cdot \frac{A_o}{S} \cdot P_o + C_S^2 \cdot \left(\frac{A_o}{S}\right)^2 P_o + \ldots + C_S^N \cdot \left(\frac{A_o}{S}\right)^N P_o = 1$$

Wielkość P_o można więc określić zależnością:

$$P_o = \frac{1}{\sum\limits_{i=o}^{N} C_S^i \left(\frac{A_o}{S}\right)^i}$$

gdzie ilość kombinacji po i elementów z S wyraża się:

$$C_S^i = \frac{S!}{i!\,.\,/S - i/!}$$

Prawdopodobieństwo stanu "x" wyraża się:

$$P_x = \frac{C_S^x \left(\frac{A_o}{S}\right)^x}{\sum_{i=o}^{N} C_S^i \left(\frac{A_o}{S}\right)^i}$$

Prawdopodobieństwo stanu "N", to znaczy prawdopodobieństwo istnienia w danym systemie obsługi N obsługiwanych zgłoszeń wyraża się:

$$P_N = \frac{C_S^N \left(\frac{A_o}{S}\right)^N}{\sum_{i=o}^{N} C_S^i \left(\frac{A_o}{S}\right)^i}$$

Biorąc pod uwagę, że:

$$\frac{A_o}{S} = \frac{A}{S - A_z}$$

oraz że w omawianym przypadku prawdopodobieństwo strat

$$B = /1 - \frac{N}{S}\,/P_N$$

otrzymać można po przekształceniach znany wzór prawdopodobieństwa Engseta-Fry'a:

$$B = \frac{C_{S-1}^{N}\left(\frac{A}{S-A/1-B/}\right)^{N}}{\sum\limits_{i=0}^{N} C_{S-1}^{i}\left(\frac{A}{S-A/1-B/}\right)^{i}}$$

Zwróćmy uwagę, że omawiany wzór dla $S \longrightarrow \infty$, gdy wyrażenia

$$\frac{A}{S-A/1-B/} \longrightarrow \frac{A}{S} \quad \text{oraz} \quad C_{S-1}^{i} \longrightarrow \frac{S^{i}}{i!}$$

przechodzi w wyżej podany wzór Erlanga.

2.3. Przypadki graniczne

Omówmy najpierw graniczny przypadek, gdy $S \leqslant N$. Ten przypadek jest przypadkiem granicznym rozkładu Engseta i nazywa się rozkładem Bernoulliego. Po odpowiednich przeliczeniach uzyskuje się następujące prawdopodobieństwo stanu "x":

$$P_x = C_S^x \left(\frac{A}{S}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{A}{S}\right)^{S-x}$$

Jak wspomniano wyżej, w omawianym stanie granicznym nie występuje stan natłoku, natomiast liczba zgłoszeń podawanych do systemu obsługi jest ograniczona do liczby S źródeł ruchu. Prawdopodobieństwo jednoczesnych S procesów obsługi wiążących się z pojawieniem się zgłoszeń od wszystkich źródeł ruchu jednocześnie wyraża się:

$$P_S = \left(\frac{A}{S}\right)^S$$

Innym granicznym przypadkiem jest przypadek, kiedy N oraz S są nieograniczone. Ten przypadek - zwany rozkładem Poissona - - jest granicznym w stosunku do rozkładu Erlanga. W danym przypadku prawdopodobieństwo niepodawania zgłoszenia do systemu obsługi P_o wyraża się:

$$P_o = \frac{1}{1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^N}{N!}} \xrightarrow[N \to \infty]{} e^{-A}$$

Prawdopodobieństwo obsługiwania w danym systemie obsługi jednocześnie x zgłoszeń wyraża się w tym przypadku:

$$P_x = \frac{A^x}{x!} e^{-A}$$

2.4. Prawdopodobieństwo stanu zajętości aparatów obsługi

Rozpatrzmy najpierw prawdopodobieństwo stanu zajętości dowolnych aparatów obsługi.

W każdym z wyżej omawianych rozkładów obsługi, w przypadku pełnej dostępności do aparatów obsługi, inaczej wyraża się prawdopodobieństwo stanu zajętości x dowolnych aparatów obsługi w danym systemie obsługi. Omawiane prawdopodobieństwo oznaczane jest również symbolem G/x/ i wyraża się dla przypadku rozkładu Erlanga:

$$G/x/ = \frac{\frac{A^x}{x!}}{\sum_{i=0}^{N} \frac{A^i}{i!}}$$

Istotną cechą powyższej funkcji jest to, że największa wartość G/x/ występuje gdy x = A. Oznacza to, że w systemie obsługi o nieskończonej liczbie źródeł ruchu i N aparatach obsługi największe jest prawdopodobieństwo wystąpienia jednocześnie A procesów obsługi. Dla otrzymania konkretnej liczby procesów obsługi, A powinno być wyrażone w erlangach.

W przypadku rozkładu Engseta prawdopodobieństwo istnienia w systemie obsługi jednocześnie x obsługiwanych zgłoszeń można wyrazić:

$$G/x/ = \frac{C_S^x \cdot \alpha^x}{\sum_{i=o}^{N} C_S^i \cdot \alpha^i} .$$

gdzie: α jest równa $\frac{A}{S}$ i oznacza średnie natężenie ruchu podawanego do systemu obsługi przez jeden aparat obsługi. W przypadku rozkładu Bernoulliego występuje zależność:

$$G/x/ = C_S^x . \alpha^x /1 - \alpha/^{S-x}$$

Dla przypadku rozkładu Poissona:

$$G/x/ = \frac{A^x}{x!} e^{-A}$$

Rozpatrzmy z kolei prawdopodobieństwo stanu zajętości ściśle określonych aparatów obsługi spośród danego ich zbioru. Prawdopodobieństwo to oznacza się symbolem H/x/ i może być wyznaczone w oparciu o ogólny wzór sformułowany przez uczonego szwedzkiego C. Palma [7]. Do wyprowadzenia tego wzoru przyjęto założenie, że w stanie układu obsługi charakteryzującym się zajętością pewnej liczby i aparatów obsługi, x spośród tych zajętych aparatów obsługi to ściśle określone rozważane w danym przypadku aparaty obsługi. Rozwiązanie tak sformułowanego zagadnienia wymaga określenia prawdopodobieństwa jednoczesności zdarzeń, a mianowicie: prawdopodobieństwa stanu zajętości dowolnych i aparatów obsługi spośród całego zbioru N tych aparatów oraz warunkowego prawdopodobieństwa zajętości w zbiorze N aparatów obsługi x ściśle określonych rozważanych aparatów, pod warunkiem, że w całym zbiorze zajętych jest i dowolnych aparatów obsługi. Pierwsze prawdopodobieństwo to wyżej podane prawdopodobieństwo G/i/, drugie natomiast prawdopodobieństwo, które oznaczamy P/x|i/ może być wyrażone w następujący sposób:

$$P/x\,|\,i/ = \frac{C_{N-x}^{i-x}}{C_N^i}$$

W omawianym wyrażeniu dla każdej wartości "i" , gdy ma miejsce też zależność $x < i \leqslant N$, ogólna liczba kombinacji wynosi C_N^i. W tym układzie jednocześnie liczba kombinacji ze ściśle określonymi rozpatrywanymi x aparatami obsługi wynosi:

$$C_{N-x}^{i-x}$$

W omawianym więc przypadku otrzymujemy po przeliczeniach:

$$P/x|i/ = \frac{/N-x/!}{N!} \cdot \frac{i!}{/i-x/!}$$

Prawdopodobieństwo zajętości ściśle określonych rozpatrywanych x aparatów obsługi spośród N w danym systemie obsługi zapisujemy w postaci:

$$H/x/ = \sum_{i=x}^{N} G/i/ \cdot P/x|i/$$

i dalej:

$$H/x/ = \frac{/N-x/}{N!} \sum_{i=x}^{N} \frac{i!}{/i-x/!} \quad G/i/$$

a po wprowadzeniu pomocniczej wielkości i-x = μ, mamy:

$$H/x/ = \frac{/N-x/!}{N!} \sum_{\mu=o}^{N-x} \frac{/x+\mu/!}{\mu!} \cdot G/x+\mu/$$

W przypadku rozkładu Erlanga omawiane prawdopodobieństwo zajętości ściśle określonych rozpatrywanych aparatów obsługi spośród N w danym systemie obsługi wyraża się:

$$H/x/ = \frac{/N-x/!}{N!} \cdot \sum_{\mu=o}^{N-x} \frac{/x-\mu/!}{\mu} \quad \frac{\dfrac{A^{/x+\mu/}}{/x+\mu/!}}{\displaystyle\sum_{i=o}^{N} \frac{A^{i}}{i!}} =$$

$$= \frac{/N-x/!}{N!} \; \frac{A^x \sum\limits_{\mu=o}^{N-x} \frac{A^\mu}{\mu!}}{\sum\limits_{i=o}^{N} \frac{A^i}{i!}} = \frac{A^N}{N! \sum\limits_{i=o}^{N} \frac{A^i}{i!}} \cdot \frac{/N-x/! \sum\limits_{\mu=o}^{N-x} \frac{A^\mu}{\mu!}}{A^{N-x}}$$

Łatwo stwierdzić, że iloczyn tych dwóch ułamków przechodzi w następujący iloraz dwóch wyrażeń pierwszej funkcji Erlanga:

$$H/x/ = \frac{E_N/A/}{E_{N-x}/A/} \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant N$$

odpowiednio dla N i N-x aparatów obsługi. Jest to tak zwany wzór Palma-Jacobaeusa.

W przypadku rozkładu Engseta mamy następujące wyrażenie funkcji prawdopodobieństwa zajętości ściśle określonych rozpatrywanych aparatów obsługi spośród N.

$$H/x/ = \frac{/N-x/!}{N!} \; \frac{\sum\limits_{\mu=o}^{N-x} \frac{/x+\mu/!}{\mu!} \; \frac{S!}{/x+\mu/!\,/S-x-\mu/!} \cdot \alpha^{x+\mu}}{\sum\limits_{i=o}^{N} C_S^i \, \alpha^i} =$$

$$= \frac{C_S^N \, \alpha^N}{\sum\limits_{i=o}^{N} C_S^i \, \alpha^i} \cdot \frac{\sum\limits_{\mu=o}^{N-x} C_{S-x}^{\mu} \, \alpha^\mu}{C_{S-x}^{N-x} \, \alpha^{N-x}}$$

Jak łatwo stwierdzić, iloczyn tych dwóch ułamków przechodzi w następujący iloraz dwóch wyrażeń prawdopodobieństwa zajętości dowolnych aparatów obsługi według rozkładu Engseta.

$$H/x/ = \frac{G_S/N/}{G_{S-x}/N-x/} \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant N$$

gdzie - $G_S/N/$ jest prawdopodobieństwem zajętości wszystkich N aparatów obsługi w systemie obsługi, do którego wchodzi S źródeł ruchu.

$G_{S-x}/N-x/$ jest prawdopodobieństwem zajętości N-x aparatów obsługi spośród N w systemie obsługi, do którego wchodzi S-x źródeł ruchu.

Dla przypadku granicznego rozkładu Bernoulliego prawdopodobieństwo H/x/ zajętości ściśle określonych aparatów spośród N w danym systemie obsługi wyraża się:

$$H/x/ = \frac{C_S^x}{C_N^x} \cdot \left(\frac{A}{S}\right)^x$$

Tu charakterystyczny jest przypadek S=N i wtedy otrzymuje się:

$$H/x/ = \left(\frac{A}{N}\right)^x$$

Inny graniczny przypadek rozkładu Poissona doprowadza nas do zależności

$$H/x/ = \frac{N-x!}{N!} A^x = \frac{A^N}{N!} e^{-A} \frac{/N-x/!}{A^{N-x}} \cdot e^A$$

Również to wyrażenie przechodzi w iloraz prawdopodobieństwa zajęcia dowolnych N aparatów obsługi i N-x aparatów obsługi dla przypadku rozkładu Poissona:

$$H/x/ = \frac{G/N/}{G/N-x/}$$

2.5. Niektóre dane o pierwszej funkcji Erlanga

Pierwsza funkcja Erlanga:

$$E_{1,N}/A/ = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=o}^{N} \frac{A^i}{i!}}$$

ma bardzo duże znaczenie dla wielu przypadków w teorii ruchu telefonicznego i była poddawana wielu analizom /między innymi przez C. Palma [7]/.

Przy stałej wielkości A zależność między wyrażeniami tej funkcji dla wartości N i wartości N-1 może być zapisana w następującej postaci:

$$E_{1,N}/A/ = \frac{A.E_{1,N-1}/A/}{N + A . E_{1,N-1}/A/}$$

lub odwrotnie:

$$E_{1,N-1}/A/ = \frac{N}{A} \cdot \frac{E_{1,N}/A/}{1 - E_{1,N}/A/}$$

Na podstawie pierwszego z dwóch wyrażeń, korzystając z wyjściowej zależności $E_{1,1}/A/ = \frac{A}{1+A}$, Palm podał dokładne tablice pierwszej funkcji Erlanga [8].

Zwróćmy uwagę, że w każdym przypadku omawianej funkcji

$$E_{1,N}/A/ < E_{1,N-1}/A/$$

a jednocześnie można otrzymać wyrażenie

$$1 - E_{1,N}/A/ = \frac{N}{A} \cdot \frac{E_{1,N}/A/}{E_{1,N-1}/A/}$$

w związku z czym można też stwierdzić, że

$$1 - E_{1,N}/A/ < \frac{N}{A}$$

Wprowadźmy z kolei pojęcie tzw. natężenia pozostałości ruchowej [21]. Jest to średnie natężenie ruchu, który nie zostaje obsłużony przez zbiór N aparatów obsługi, na który podany zostaje ruch przypadkowy o średnim natężeniu A.

$$R_N/A/ = A \cdot E_{1,N}/A/$$

Biorąc różnice pozostałości ruchowej po N-1 aparatach obsługi i N aparatach obsługi otrzymujemy obciążenie ruchowe N-tego aparatu obsługi, gdy na ten zbiór aparatów obsługi zostaje podany ruch przypadkowy o natężeniu A. Natężenie ruchu obsługiwanego przez N-ty aparat obsługi wyraża się:

Tablica 1a

A = f/N/, N = 1...50 wg wzoru Erlanga

N \ $E_{1,N}$/A/	0,5	1	5	10	20%
1	0,005	0,010	0,050	0,111	0,250
2	0,105	0,153	0,381	0,595	1,000
3	0,349	0,455	0,899	1,271	1,930
4	0,701	0,869	1,525	2,045	2,945
5	1,132	1,361	2,218	2,881	4,010
6	1,622	1,909	2,960	3,758	5,109
7	2,158	2,501	3,738	4,666	6,230
8	2,730	3,128	4,543	5,597	7,369
9	3,333	3,782	5,370	6,546	8,522
10	3,961	4,461	6,216	7,511	9,685
11	4,611	5,160	7,076	8,487	10,857
12	5,279	5,876	7,950	9,474	12,036
13	5,964	6,607	8,835	10,470	13,222
14	6,663	7,352	9,730	11,474	14,413
15	7,376	8,108	10,633	12,484	15,608
16	8,100	8,875	11,544	13,500	16,807
17	8,834	9,652	12,461	14,521	18,010
18	9.578	10,437	13,385	15,548	19,216
19	10,331	11,230	14,315	16.579	20,424
20	11,092	12,031	15,249	17,613	21,635
21	11,850	12,836	16,168	18,651	22,848
22	12,695	13,651	17,132	19,692	24,064

c.d. tabl. 1a

23	13,416	14,470	18,080	20,736	25,281
24	14,204	15,295	19,031	21,783	26,499
25	14,997	16,125	19,995	22,833	27,719
26	15,795	16,959	20,943	23,885	28,941
27	16,598	17,797	21,904	24,939	30,164
28	17,406	18,640	22,867	25,995	31,388
29	18,218	19,487	23,833	27,053	32,613
30	19,034	20,337	24,802	28,113	33,840
31	19,85	21,19	25,77	29,17	35,07
32	20,68	22,05	26,75	30,24	36,30
33	21,51	22,91	27,72	31,30	37,52
34	22,34	23,77	28,70	32,37	38,75
35	23,17	24,64	29,68	33,43	39,98
36	24,01	25,51	30,66	34,50	41,22
37	24,85	26,38	31,64	35,57	42,45
38	25,69	27,25	32,63	36,64	43,68
39	26,53	28,13	33,61	37,71	44,91
40	27,38	29,01	34,60	38,79	46,15
41	28,23	29,89	35,59	39,86	47,38
42	29,08	30,77	36,58	40,94	48,62
43	29,94	31,66	37,57	42,01	49,85
44	30,80	32,54	38,56	43,08	51,09
45	31,66	33,43	39,55	44,16	52,32
46	32,52	34,32	40,54	45,24	53,56
47	33,38	35,21	41,54	46,32	54,80
48	34,25	36,11	42,54	47,40	56,03
49	35,11	37,00	43,54	48,48	57,27
50	35,96	37,90	44,53	49,56	58,51

Tablica 1b

$A = f/N/$ dla $E_{1,N}/A/ = 1\%$ $N = 51 \div 150$ wg wzoru Erlanga

N	A /erl./	N	A /erl./	N	A /erl./
51	38,8	74	60,0	97	81,3
52	39,7	75	60,9	98	82,2
53	40,6	76	61,8	99	83,1
54	41,5	77	62,7	100	84,1
55	42,4	78	63,6	101	85,0
56	43,4	79	64,6	102	86,0
57	44,3	80	65,5	103	86,9
58	45,2	81	66,4	104	87,8
59	46,1	82	67,3	105	88,8
60	47,1	83	68,2	106	89,7
61	48,0	84	69,2	107	90,7
62	48,9	85	70,1	108	91,6
63	49,8	86	71,0	109	92,6
64	50,7	87	71,9	110	93,5
65	51,7	88	72,8	111	94,5
66	52,6	89	73,8	112	95,4
67	53,5	90	74,7	113	96,4
68	54,4	91	75,6	114	97,3
69	55,3	92	76,6	115	98,2
70	56,3	93	77,5	116	99,2
71	57,2	94	78,4	117	100,1
72	58,1	95	79,4	118	101,1
73	59,0	96	80,3	119	102,0

c.d. tabl. 1b

120	103,0	130	112,4	140	122,1
121	103,9	131	113,4	141	123,1
122	104,9	132	114,4	142	124,0
123	105,9	133	115,3	143	125,0
124	106,7	134	116,3	144	125,9
125	107,7	135	117,3	145	126,9
126	108,6	136	118,2	146	127,8
127	109,6	137	119,2	147	128,8
128	110,5	138	120,2	148	129,7
129	111,5	139	121,2	149	130,7
				150	131,6

$$a_N/A/ = R_N/A/ \cdot \left[\frac{N}{A - R_N/A/} - 1\right]$$

Ruch nieobsłużony przez zbiór N aparatów obsługi, na który podany jest strumień zgłoszeń o średnim natężeniu A, ma inny charakter niż ruch przypadkowy. Odróżnienie różnego rodzaju charakteru ruchu może nastąpić za pomocą dodatkowej wielkości, nazwanej wariancją tego ruchu. Wariancja ruchu występującego w przypadku rozkładu Erlanga została określona w pracach Wilkinsona [18] w następującej postaci:

$$V_N/A/ = R_N/A/ \cdot \left[1 - R_N/A/ + \frac{A}{N + 1 - A/1 - E/}\right]$$

Każdy strumień zgłoszeń w ujęciu Wilkinsona charakteryzuje się jego natężeniem oraz wariancją. Dla ruchu przypadkowego te dwie wielkości są sobie równe, natomiast dla ruchu o większych rozrzutach wartości chwilowych niż ruch przypadkowy wariancja ta jest większa od pozostałości ruchowej.

Metoda Wilkinsona została zmodyfikowana przez Bretschneidera [20], który wprowadził zamiast funkcji wariancji tzw. funkcję rozsiewności wyrażoną następująco:

$$D_N/A/ = R_N/A/ \left[\frac{A}{N+1-A+R_N/A/} - R_N/A/\right]$$

Jak widać

$$D_N/A/ = V_N/A/ - R_N/A/$$

a więc dla ruchu przypadkowego rozsiewność jest równa zeru, a większa jest dla ruchu o większych wahaniach wartości szczytowej niż ruch przypadkowy.

Bretschneider opracował obszerne tablice obejmujące zarówno dane natężenia ruchu, jak i jego rozsiewność w funkcji A oraz N. Tablice te mogą być wykorzystywane dla wielu obliczeń i zostają wobec tego w obszernych fragmentach przytoczone w niniejszej pracy [zał. 1].

W uzupełnieniu danych o pierwszej funkcji Erlanga przytoczmy tu jeszcze informację o zależności między załatwianym strumieniem zgłoszeń A_z, liczbą aparatów obsługi N oraz stratami $E_{1,N}/A/$. Jak już wspomniano wyżej, załatwiany strumień zgłoszeń jest mniejszy od strumienia oferowanego, przy czym:

$$A_z = A\left[1 - E_{1,N}/A/\right]$$

Podkreślić trzeba, że załatwiany strumień zgłoszeń jest tym strumieniem, który może praktycznie zostać zmierzony na danej grupie aparatów obsługi /zbiorze organów połączeniowych, wiązce łączy/.

Dodajmy tu, że na podstawie poprzednio podanych zależności można też napisać:

$$A_z = N \cdot \frac{E_{1,N}/A/}{E_{1,N-1}/A/}$$

oraz

$$\frac{A_z}{N} = \frac{E_{1,N}/A/}{E_{1,N-1}/A/}$$

Podkreślmy tu jeszcze, że za pomocą załączonej tablicy 2 można ewentualnie określić wielkość strat ruchowych, gdy zmierzona jest faktyczna wielkość A_z i dana liczba łączy N dla przypadku pełnej dostępności źródeł ruchu do aparatów obsługi i następnie podawany strumień zgłoszeń, według rozkładu Erlanga.

Tablica 2

$$A_z = f\left[N,\ E_{1,N}/A/\right],\ D = N$$

$E_{1,N}/A/$ \ N	5	10	20	30	40	50	75	100
0,005	1,13	3,96	11,09	19,03	27,38	35,98	58,0	81,0
0,01	1,35	4,41	11,91	20,14	28,72	37,52	61,0	83,0
0.05	2,11	5,90	14,60	23,50	33,00	42,50	66,0	91,0
0,10	2,60	6,76	15,75	25,30	34,91	44,60	69,0	94,0
0,20	3,20	7,80	17,40	27,10	37,00	46,80	71,6	96,0
0,30	3,60	8,40	18,20	28,10	38,00	47 70	73.0	98,0
0,40	3.96	8,80	18,70	28,60	38,50	48,20	74,5	99,0
0,50	4,20	9,15	19,10	29,70	39,00	49,00	75,0	100,0

3. UKŁADY O PEŁNEJ DOSTĘPNOŚCI Z OPÓŹNIANIEM ZGŁOSZEŃ

3.1. Niektóre zasadnicze pojęcia dotyczące opóźniania zgłoszeń

System obsługi z opóźnianiem zgłoszeń dla przypadku $N > A$ /N - liczba aparatów obsługi, A - średnie natężenie strumienia zgłoszeń podane w erlangach/ charakteryzuje się w zasadzie tym, że opóźnianie, a więc oczekiwanie na początek obsługi pojawiających się zgłoszeń, dotyczy tylko niewielkiej części wszystkich obsługiwanych zgłoszeń.

Jakość obsługi może być w tym przypadku scharakteryzowana prawdopodobieństwem występowania opóźniania zgłoszenia - $P/>0/$ oraz prawdopodobieństwem opóźniania większego niż określony czas t - $P/>t/$.

Gęstość zmiennej losowej opóźniania, tzn. prawdopodobieństwo, że opóźnianie obsługi zgłoszenia zawiera się w przedziale czasowym $/t, t+\Delta t/$ określa się według zależności

$$p/t/ = -\frac{d}{dt} P/>t/$$

Określenie średniego czasu opóźniania odniesionego do wszystkich zgłoszeń może być obliczone według zależności:

$$t_o = \int_0^\infty t.p/t/.dt \quad \text{lub} \quad t_o = \int_0^\infty P/>t/.dt$$

Natomiast przeciętne opóźnienie odniesione tylko do tych zgłoszeń, które podlegają opóźnieniu, może następować według wzoru

$$t_s = \frac{t_o}{P/>0/}$$

Wspomnijmy tu jeszcze o bardzo ciekawym teoretycznym opracowaniu Erlanga [1] dla przypadku stałego czasu obsługi - h. Erlang określił mianowicie dla najprostszego strumienia zgłoszeń prawdopodobieństwo P/t/ nie większego opóźniania obsługi niż pewien określony czas t. Rozumowanie swoje przeprowadził Erlang dla jednego, dwóch i trzech aparatów obsługi. Omawiane opracowanie dla stałego czasu obsługi nie było szerzej praktycznie wykorzystywane. Powstało natomiast szereg innych opracowań opartych na nieco innych zasadach niż podane przez Erlanga. Prace teoretyczne z dziedziny teorii ruchu telefonicznego w latach 50-70 wykazały, że opracowanie Erlanga na ten temat było najbardziej poprawne.

3.2. Teoria Erlanga dla wykładniczego rozkładu czasu obsługi

W cyklu prac A.K. Erlanga z lat 1909-1925 znajduje się również praca na temat procesu obsługi z opóźnianiem zgłoszeń w przypadku wykładniczego rozkładu czasu obsługi. Rozważania przeprowadzone są dla najprostszego strumienia zgłoszeń i przy założeniu nieograniczonego czasu opóźniania. Prostszy z omawianych tam przypadków to przypadek nieskończenie dużej liczby źródeł ruchu.

W omawianym systemie obsługi muszą być rozpatrzone stany, gdy liczba zgłoszeń x jest mniejsza od liczby obsługiwanych aparatów obsługi N, jak również stany, gdy liczba zgłoszeń x jest większa od liczby aparatów obsługi N. W pierwszym przypadku wszystkie zgłoszenia są natychmiast obsługiwane, a w przypadku drugim zgłoszenia oczekują na początek obsługi.

Jeżeli oznaczyć przez P_q prawdopodobieństwo, że w systemie obsługi znajdaje się N załatwianych i q opóźnionych zgłoszeń, to można zapisać następującą równość:

$$N \cdot P_{q+1} = A \cdot P_q$$

gdzie: A - oferowany strumień zgłoszeń.

Dla wszystkich wymienionych stanów systemu obsługi można napisać:

$$\sum_{i=o}^{N-1} P_i + \sum_{q=o}^{\infty} P_q = 1$$

gdzie pierwsza suma dotyczy obsługiwania od zera do N-1 zgłoszeń bez oczekiwania, a druga suma - obsługiwania pozostałych zgłoszeń z oczekiwaniem. Z kolei mamy następujące wyrażenie:

$$\sum_{i=o}^{N-1} \frac{A_i}{i!} \cdot P_o + \sum_{q=o}^{\infty} \frac{A^N}{N!} /\frac{A}{N}/^q \cdot P_o = 1$$

Po rozwiązaniu tej równości otrzymujemy wyrażenie na wielkość prawdopodobieństwa braku obsługiwanych zgłoszeń w postaci:

$$P_o = \frac{1}{\sum_{i=o}^{N-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^N}{N!} \frac{N}{N-A}}$$

Prawdopodobieństwo opóźniania zgłoszeń, to znaczy prawdopodobieństwo pojawienia się zgłoszenia przy mającej już miejsce obsłudze N zgłoszeń równe:

$$\sum_{q=0}^{\infty} P_q$$

wyrazi się jako tzw. druga funkcja Erlanga:

$$E_{2,N}/A/ = \frac{\frac{A^N}{N!} \cdot \frac{N}{N-A}}{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{A^N}{N!} \cdot \frac{N}{N-A}}$$

Podkreślmy tu, że druga funkcja Erlanga przyjmuje dla tych samych wartości N i A - wartości większe niż pierwsza funkcja Erlanga, przy czym druga funkcja Erlanga może być łatwo przedstawiona za pomocą pierwszej funkcji:

$$E_{2,N}/A/ = \frac{N \cdot E_{1,N}/A/}{N-A\left[1 - E_{1,N}/A/\right]}$$

a dla małych wartości $E_{1,N}/A/$ stosunek między tymi funkcjami Erlanga wynosi w przybliżeniu:

$$\frac{E_{2,N}/A/}{E_{1,N}/A/} = \frac{N}{N-A}$$

Wspomnijmy dalej, że podobnie do powyższego rozważania może być przeprowadzone rozważanie dla skończonej liczby źródeł ruchu, gdzie wielkość natężenia ruchu zależy od liczby obsługiwanych zgłoszeń:

$$A = \frac{A_o}{S} \quad /S - 1/$$

Ten przypadek jest podobny do przypadku Engseta dla obsługi ze stratami zgłoszeń [25].

Na podstawie drugiej funkcji Erlanga może być z kolei określone prawdopodobieństwo $P/>t/$ opóźniania większego niż określony odcinek czasu t oraz średni czas opóźniania zgłoszeń. W omawianych pracach A.K. Erlang określił zależność opóźnienia danego zgłoszenia od opóźnienia zgłoszenia poprzedzającego.

Prawdopodobieństwo, że poprzednie zgłoszenie pojawiło się w odstępie czasu τ przed zgłoszeniem rozpatrywanym wynosi

$$p/\tau/ = \lambda \cdot e^{-\lambda\tau}$$

Do rozważań wprowadza się również pojęcie czasu trwania zgłoszenia poprzedzającego t_p. Czas trwania zgłoszenia złożony jest z czasu opóźniania oraz czasu obsługi. Obsługa zgłoszenia rozpatrywanego będzie opóźniona o odcinek czasu większy od t, jeżeli czas trwania zgłoszenia poprzedzającego t_p będzie większy niż $t + \tau$.

Po szeregu przekształceniach matematycznych otrzymujemy w omawianym przypadku następującą zależność

$$P/>t/ = P/>0/ \cdot e^{-/N-A/\frac{t}{h}}$$

gdzie:

A - oferowany strumień zgłoszeń;

N - liczba aparatów obsługi;

h - średni czas obsługi zgłoszenia;

t - czas graniczny.

Prawdopodobieństwo, że opóźnienie obsługi zgłoszenia zawie-

Tablica 3

Natężenie ruchu telefonicznego A=f/N/ obsługiwanego przez N łączy przy $E_{2,N}/A/ = 0,1$ i różnych wartościach $\frac{t}{h}$

N \ $\frac{t}{h}$	0,1	0,25	0,5	1	1,5	2
1	0,46	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80
2	0,93	1,0	1,2	1,45	1,6	1,7
3	1.5	1,6	1,9	2,2	2,4	2,5
4	2,0	2,3	2,6	2,9	3,1	3,25
5	2,6	3,0	3,4	3,8	4,0	4,15
6	3,3	3,6	4,1	4,7	4,9	5,1
7	4,0	4,4	4,9	5,4	5,9	6,1
8	4,8	5,3	5,8	6,5	6,9	7,1
9	5,6	6,2	6,7	7,5	7,9	8,1
10	6,5	7.0	7,6	8,4	8,8	9,0
11	7,4	7,9	8,6	9,6	9,8	10,0
12	8,1	8,8	9,5	10,4	10,8	11,0
13	9,0	9,7	10,4	11,3	11,8	12,0
14	9,9	10,6	11,4	12,3	12,8	13,0
15	10,8	11,6	12,4	13,3	13,8	14,0
16	11,6	12,5	13,3	14,3	14,8	15,0
17	12,5	13,5	14,3	15,2	15,8	16,0
18	13,4	14,4	15,2	16,2	16,8	17,0
19	14,3	15,3	16,1	17,2	17,8	18,0
20	15,2	16,2	17,1	18,2	18,8	19,0
25	19,4	20,5	22,0	23,2	23,6	24,0
30	24,2	25,6	27,0	28,0	28,6	29,0
35	28,3	30,0	31,8	33,2	33,7	34,0
40	32,6	34,2	36,7	38,3	38,8	39,0
50	42,0	44,0	46,2	48,0	48,6	48,0

ra się w przedziale czasowym $/t, t+\Delta t/$ wyrazi się w omawianym przypadku:

$$p/t/ = P/>0/ \frac{N-A}{h} e^{-/N-A/\frac{t}{h}}$$

Średnie opóźnienie t_o odniesione do wszystkich pojawiających się zgłoszeń wynosi

$$t_o = \int_0^{\infty} t \cdot p/t/.dt$$

i po przeliczeniach otrzymujemy:

$$t_o = P/>0/ \frac{h}{N-A}$$

Stąd wynika, że średnie opóźnienie odniesione tylko do tych zgłoszeń, które są opóźniane wynosi:

$$t_s = \frac{h}{N-A}$$

Przykładową ilustracją liczbową drugiej funkcji Erlanga może być tablica 3 - zależność ruchu oferowanego A od liczby aparatów obsługi /łączy/ N przy prawdopodobieństwie oczekiwania /opóźniania zgłoszeń/ $E_{2,N}/A/ = 0,1$,

3.3. Stały czas obsługi - teoria Moliny i Crommelina

Prostą metodę przybliżonego określania zależności występujących w systemie obsługi z opóźnianiem zgłoszeń przy stałym czasie obsługi podał w pracach swoich Molina [2], [3].

Założono istnienie nieskończonej liczby źródeł ruchu oferujących strumień zgłoszeń o średnim natężeniu A i obsługiwany przez N aparatów obsługi.

Prawdopodobieństwo, że zajęte są wszystkie aparaty obsługi może być wyrażone za pomocą pierwszej funkcji Erlanga, natomiast prawdopodobieństwo opóźniania zgłoszenia - za pomocą drugiej funkcji Erlanga. Jak stwierdzono wyżej, w omawianym przypadku prawdopodobieństwo opóźniania zgłoszenia jest większe niż prawdopodobieństwo zajętości wszystkich aparatów obsługi. A więc część zgłoszeń opóźnionych nie zostaje załatwiona bezpośrednio przez zwalniające się aparaty obsługi, gdyż przez te aparaty obsługi załatwione zostają najpierw zgłoszenia, które pojawiły się wcześniej. Po odpowiednich dalszych rozważaniach ustalono, że prawdopodobieństwo nieobsłużenia danego zgłoszenia bezpośrednio przez zwalniający się aparat obsługi może być określone według zależności $a = \frac{A}{N}$, zaś prawdopodobieństwo obsłużenia zgłoszenia przez jeden aparat obsługi wynosi wtedy /1-a/. Jeżeli liczba aparatów obsługi wynosi N, to prawdopodobieństwo, że dane zgłoszenie nie zostanie obsłużone przez żaden z N aparatów obsługi może być zapisane jako a^N. Oznaczając opóźnienie początku obsługi przez t i stały czas obsługi w omawianym przypadku przez h, opóźnienie to może być obliczone według zależności:

$$t = /b + u/ \; . \; h$$

gdzie: b - dowolna całkowita liczba nieujemna,

u - liczba dodatnia mniejsza od jedności.

Jeżeli przyjmie się również, że prawdopodobieństwo opóźniania początku obsługi P/>0/ wyrażone będzie za pomocą drugiej funkcji

Erlanga, to po odpowiednich przeliczeniach otrzymujemy:

$$P/>t/ = P/>0/\ a^{bN} \cdot \left[1-u\ /1-a/\right]^{N}$$

a średni czas opóźnienia zgłoszeń opóźnionych:

$$t_s = \frac{h}{N-A} \cdot \frac{N}{N+1} \cdot \frac{1-a^{N+1}}{1-a^{N}}$$

Obok przytoczonej teorii Moliny szerokie praktyczne zastosowanie dla stałego czasu obsługi znalazła teoria Crommelina [9] ; podobną metodę, niezależnie od Crommelina, opracował również Pollaczek.

Założenia wyjściowe są tu podobne do podanych poprzednio i obejmują ruch o średnim natężeniu A, nieskończoną liczbę źródeł ruchu i system obsługi przez N aparatów obsługi przy stałym czasie obsługi poszczególnych zgłoszeń. Założono przy tym taką kolejność załatwiania zgłoszeń opóźnionych, z jaką te zgłoszenia się pojawiły.

Otrzymane przez Crommelina zależności mają skomplikowane postaci matematyczne i do praktycznego ich wykorzystywania mogą być przedstawione w postaci krzywych /rys. 1/[x].

Podane zostają tu zależności prawdopodobieństwa:

$$P/>t/ = f\ /\frac{t}{h}\ ,\ \frac{A}{N}/$$

oraz

$$\frac{t_s}{h} = f/A, N/$$

[x] Wszystkie rysunki są zamieszczone na końcu artykułu.

dla N = 1, 2 lub 3 aparatów obsługi,
tzn. dla przypadków, które najczęściej spotykane są w praktyce w centralach telefonicznych przy scentralizowanych układach sterujących. Krzywe Crommelina bowiem wykorzystuje się przede wszystkim przy określaniu prawdopodobieństwa oczekiwania dłuższego niż graniczny czas t i średniego czasu opóźniania w przypadku obsługi przez cechowniki organów indywidualnych w centralach systemu crossbar.

3.4. System opóźniania zgłoszeń i system ruchu z oczekiwaniem

Na wstępie należy naświetlić używane w praktyce określenia różnych sposobów załatwiania zgłoszeń z opóźnianiem. Rozróżnić tu trzeba mianowicie system z małym opóźnianiem i system z opóźnianiem dużym. W dawnej nomenklaturze używanej w teorii ruchu telefonicznego system z małym opóźnianiem był również nazywany ruchem przyspieszonym, natomiast system z dużym opóźnianiem był nazywany ruchem z oczekiwaniem.

System z małym opóźnianiem, realizowany, gdy liczba łączy N jest większa od średniego natężenia ruchu podawanego w erlangach A, tzn. gdy przepustowość ruchowa aparatów obsługi jest w zasadzie większa od ruchu oferowanego przez źródła ruchu, cechuje się stosunkowo niewielkim czasem opóźniania niewielkiej zwykle części oferowanych zgłoszeń.

System z małym opóźnianiem może być realizowany przy istnieniu fizycznie występującej kolejki zgłoszeń. Zgłoszenia opóźniane mogą przy tym oczekiwać na początek obsługi bądź w wyposażeniu związanym z łączami wchodzącymi do systemu obsługi /rozpatrywanymi teoretycznie jako źródła ruchu/, bądź też w odpowiednich urządzeniach pośredniczących specjalnie zastosowanych dla zatrzymywania zgłoszeń. Z tych urządzeń pośredniczących zgłoszenia podawane są do aparatów obsługi, gdy aparaty te zwolnią się. W omawianej sytuacji można obsłużyć opóźniony strumień zgłoszeń stosunkowo niewielką liczbą miejsc w tych urządzeniach pośredniczących.

System obsługi zgłoszeń z dużym opóźnianiem występuje przy średnim natężeniu ruchu A większym niż liczba aparatów obsługi N, co oznacza, że przepustowość ruchowa aparatów obsługi jest mniejsza niż średnie natężenie oferowanego strumienia zgłoszeń. W tej sytuacji powstaje znaczny nadmiar zgłoszeń ponad te zgłoszenia, które zostają przez system obsługi obsłużone. Średni czas oczekiwania na początek obsługi przez oczekujące zgłoszenia jest w tym przypadku na tyle znaczny, że nie można zrealizować fizycznie kolejki oczekujących zgłoszeń. W praktyce pojawiające się zgłoszenia zostają zarejestrowane. Po dłuższym czasie dopiero, gdy możliwa jest obsługa zgłoszenia, z inicjatywy systemu obsługi zostaje wywołane odpowiednie źródło ruchu, a następnie obsłużone. Odstęp między zarejestrowaniem zgłoszenia i początkiem obsługi jest rzędu kilkunastu do kilkudziesięciu minut, realizacja tego systemu obsługi odbywa się praktycznie w ręcznym ruchu mm przy nie dość bogatej sieci łączy.

4. SYSTEM OBSŁUGI ZGŁOSZEŃ ZE STRATAMI W PRZYPADKU NIEPEŁNEJ DOSTĘPNOŚCI DO APARATÓW OBSŁUGI

4.1. Parametry wyjściowe i układ podstawowy

W układach o niepełnej dostępności do aparatów obsługi, nazywanych inaczej układami o cząstkowym zwielokrotnieniu wyjść, występuje N aparatów obsługi, lecz każde źródło ruchu ma dostęp tylko do określonej liczby D aparatów obsługi. Każde źródło ruchu może być więc obsłużone tylko przez tych D aparatów, które przewidziane są do jego obsługi. Zwykle źródła ruchu są dzielone na grupy. W ramach danej grupy wszystkie źródła ruchu mają dostęp do tego samego zbioru aparatów obsługi. Grupy aparatów obsługi po D, z których mogą korzystać różne grupy źródeł ruchu, są dobierane w różny sposób, z zastosowaniem niejednokrotnie przemieszczeń, przepleceń, mieszania i stopniowania. Źródła ruchu należące do różnych grup korzystają przy cząstkowym zwielokrotnieniu częściowo z tych samych aparatów obsługi, przy wykorzystaniu odpowiedniego rozdziału zgłoszeń preferującego w miarę możliwości równomierne obciążenie ruchowe poszczególnych aparatów obsługi. Liczba aparatów obsługi $N > D$, tzn. większa od liczby aparatów obsługi, z których może korzystać każde źródło, jest większa od tzw. dostępności. Oznaczając liczbę grup źródeł ruchu przez g, można napisać: $D \leqslant N \leqslant g.D$.

Przypadek krańcowy $N=D$ oznacza pełną dostępność źródeł ruchu do wszystkich aparatów obsługi w ramach jednego zbioru D tych aparatów. Drugi przypadek krańcowy $N=g.D$ oznacza również pełną dostępność, lecz w ramach g niezależnych zbiorów, każdy po D aparatów obsługi. W tym ostatnim przypadku każdy z g zbiorów źródeł ruchu obsługiwany jest całkowicie niezależnie przez swoje D aparatów obsługi.

Rozpatrywany system o cząstkowym zwielokrotnieniu ma za zadanie uzyskanie lepszego wykorzystania ruchowego aparatów obsługi przez częściowe wykorzystywanie tych samych aparatów obsługi przez źródła ruchu różnych grup.

W obu krańcowych przypadkach występuje jednakowe i najmniejsze w danym układzie średnie wykorzystanie aparatów obsługi aktualne dla stosunkowo małego zbioru D aparatów obsługi. W przedziale natomiast $D < N < gD$ występuje większe niż krańcowe średnie wykorzystanie aparatów obsługi.

W systemie cząstkowego zwielokrotnienia jest określona charakterystyczna wartość N_m. Normalny zakres praktyczny realizacji cząstkowego zwielokrotnienia występuje dla $D \leqslant N \leqslant N_m$ i przy wzroście N od D do N_m. Średnie wykorzystanie aparatów obsługi rośnie od wspomnianej wartości najmniejszej do wartości szczytowej w danym systemie obsługi. Gdy przekroczona zostaje wartość N_m, tzn. gdy $N_m < N \leqslant gD$, to wraz ze wzrostem N od N_m do gD średnie obciążenie aparatu obsługi maleje do wspomnianej najmniejszej wartości w omawianym systemie obsługi.

Omawiany przebieg ilustruje tablica nr 4, gdzie podana jest wielkość natężenia ruchu oferowanego przy stałej wielkości strat w zależności od różnej liczby aparatów obsługi i różnej dostępności między źródłami ruchu i aparatami obsługi. Zwróćmy uwagę na charakterystyczne wartości N, przy których średnie wykorzystanie aparatów obsługi po osiągnięciu wartości szczytowej zaczyna maleć.

Tablica 4

$A = f/N,D/$ przy $E_s = 0,002$

N	A dla $4x/\frac{N}{4}/$	Liczba dróg pośrednich /4xD/				
		4x8=32	4x10=40	4x12=48	4x14=56	4x20=80
12	1,09	3,83	4,32	4,63	-	-
13	-	4,21	4,77	5,1	-	-
14	-	4,59	5,21	5,6	5,92	-
15	-	4,97	5,66	6,1	6,46	-
16	2,12	5,35	6,11	6,6	7,00	-
17	-	5,73	6,55	7,1	7,54	-
18	-	6,11	7,00	7,6	8,08	-
19	-	6,49	7,44	8,1	8,62	-
20	3,6	<u>6,87</u>	7,89	8,6	9,16	10,07
21	-	7,22	8,34	9,1	9,70	10,70
22	-	7,55	8,78	9,6	10,24	11,32
23	-	7,84	9,23	10,1	10,78	11,95
24	5,58	8,11	9,67	10,6	11,32	12,57
25	-	8,35	<u>10,12</u>	11,2	11,86	13,20

c.d. tabl. 4

26	-	8,56	10,54	11,6	12,40	13,82
27	-	8,75	10,94	12,1	12,94	14,45
28	7,28	8,90	11,31	12,6	13,48	15,07
29	-	9,03	11,66	13,1	14,02	15,70
30	-	9,13	11,98	<u>13,6</u>	14,56	16,32
31	-	9,20	12,27	14,08	15,10	16,95
32	9,24	9,24	12,54	14,53	15,64	17,57
33	-	-	12,78	14,96	16,18	18,20
34	-	-	12,99	15,36	16,72	18,82
35	-	-	13,18	15,74	<u>17,26</u>	19,45
36	11,4	-	13,34	16,10	17,78	20,07
37	-	-	13,47	16,43	18,28	20,70
38	-	-	13,58	16,74	18,76	21,32
39	-	-	13,66	17,03	19,21	21,95
40	13,72	-	13,72	17,29	19,64	22,57
44	16,08	-	-	18,07	21,16	24,94
48	18,52	-	-	18,52	22,34	27,18

c.d. tabl. 4

52	21,04	-	-	-	23,18	29,28
56	23,68	-	-	-	23,68	31,25
60	26,32	-	-	-	-	33,11
64	29,04	-	-	-	-	34,84
68	31,80	-	-	-	-	36,23
72	34,56	-	-	-	-	37,91
76	37,40	-	-	-	-	39,26
80	40,28	-	-	-	-	40,28

Na przykład dla rozpatrywanego tu przykładu zgrupowania źródeł ruchu w 4 grupach przy dostępności D=10 najmniejsza liczba aparatów obsługi może wynosić 10, a największa 40. Do wartości N_m=25 średnie wykorzystanie aparatów obsługi wzrasta, natomiast dla liczby aparatów obsługi większej niż 25 przy dostępności 10 i czterech grupach źródeł ruchu średnie wykorzystanie aparatów obsługi maleje. Wykorzystanie aparatu obsługi zarówno dla przypadku N_1=10 jak i dla przypadku N_2=40 wynosi 0,343 erl., natomiast największe średnie wykorzystanie przy 25 aparatach wynosi w danym przypadku 0,4 erl.

Rozpatrzmy z kolei zasadę współpracy poszczególnych źródeł ruchu w układzie o niepełnej dostępności do aparatów obsługi. Praktyczna realizacja tego rozwiązania wiąże się z utworzeniem najpierw zbiorów dróg, które nazwalibyśmy pierwotnymi, o liczbie D dróg w każdym takim zbiorze. Do poszczególnego zbioru D ma, jak wspomniano wyżej, dostęp jedna grupa źródeł ruchu. Ogólna liczba dróg pierwotnych w rozpatrywanym systemie obsługi równa jest g.D. Z tych dróg pierwotnych za pomocą zwielokrotnienia cząstkowego uzyskuje się żądane N wyjść do aparatów obsługi. Drogi pierwotne każdej grupy mogą być wybierane według zasady wyboru kolejnościowego i wtedy obciążenie ruchowe tych dróg w danym zbiorze jest nierównomierne. Gdy natomiast drogi pierwotne każdej grupy wybierane są według zasady wyboru przypadkowego, to obciążenie tych dróg jest w zasadzie równomierne. Przede wszystkim dla zwiększenia równomierności obciążenia aparatów obsługi, jeżeli drogi pierwotne obciążone są nierównomiernie, stosuje się tzw. zwielokrotnienie stopniowane. W tym zwielokrotnieniu, w miarę malejącego obciążenia dróg pierwotnych zwiększa się stopniowo liczba równolegle połączonych dróg pierwotnych aż do pełnego dostępu od wszystkich źródeł ruchu do ostatnich aparatów obsługi. W tym rozwiązaniu drogi pierwotne o największym obciążeniu nie są zwielokrotniane i każda indywidualnie ma dostęp do swojego aparatu obsługi. Drogi o mniejszym już nieco obciążeniu są ewentualnie łączone po dwie, dzięki czemu aparaty obsługi, na które podawany jest ruch z dwóch równolegle połączonych dróg, są więcej obciążone niż gdyby na każdy aparat obsługi podawany był ruch tylko z jednej drogi pierwotnej. Najbardziej efektywnym zwielokrotnieniem stopniowanym może być takie, w którym uzyskuje się niemal równomierne obciążenie wszystkich N aparatów obsługi.

W przypadku równomiernego obciążenia dróg pierwotnych stosuje się z reguły zwielokrotnienie jednorodne skośne lub z odpowiednim przechwytywaniem.

Prace prowadzone w ostatnich kilkunastu latach uwypukliły istotne zalety wielokroci równomiernych mieszanych i przechwytywanych również w przypadku, gdy w drogach pierwotnych występuje nierównomierne obciążenie ruchowe. Dzięki właściwemu układowi zwiększa się jeszcze bardziej, niż przy typowym prostym stopniowaniu, równomierność obciążenia aparatów obsługi.

4.2. Wzór interkoneksyjny Erlanga

W pracach swoich Erlang [1] rozważał również układ o cząstkowym zwielokrotnieniu wyjść w założeniu wykładniczego czasu obsługi i najprostszego strumienia zgłoszeń. W rozważaniach tych założone zostało w pełni przypadkowe i równomierne obciążenie aparatów obsługi, co ma miejsce przy tzw. idealnym zwielokrotnieniu. Gdy w rozpatrywanym układzie występuje stan zajętości

$x < D$ aparatów obsługi, wówczas każde pojawiające się zgłoszenie może zawsze dotrzeć do swobodnego aparatu obsługi. Nie występuje więc prawdopodobieństwo natłoku. Gdy $x \geqslant D$, możliwość natłoku występuje, gdyż D wziętych do pracy aparatów obsługi może być właśnie tymi aparatami, do których ma dostęp dane źródło ruchu. Prawdopodobieństwo natłoku w danym przypadku jest równe stosunkowi liczby możliwych sposobów wyboru D aparatów spośród x, do liczby sposobów wyboru D aparatów spośród N:

$$P_x = \frac{C_X^D}{C_N^D}$$

To prawdopodobieństwo dotyczy nietrafienia na wolny aparat obsługi. Natomiast prawdopodobieństwo trafienia na wolny aparat obsługi w stanie, gdy w systemie obsługi zajętych jest x aparatów jest równe: $/1-P_x/$.

Rozwiązując postawione zadanie Erlang doszedł do wyrażenia:

$$E = \frac{\sum_{i=D}^{N} T_i \frac{A^i}{i!}}{\sum_{i=o}^{N} M_i \frac{A^i}{i!}}$$

nazwanego wzorem interkoneksyjnym Erlanga, gdzie:

$M = 1$ dla $0 \leqslant x < D$ oraz

$$M = \prod_{\mu=D}^{x-1} \left[1 - \frac{C_{\mu}^{D}}{C_{N}^{D}} \right] \quad \text{dla} \quad D \leqslant x \leqslant N$$

a

$$T = \frac{C_{x}^{D}}{C_{N}^{D}} \cdot \prod_{\mu=D}^{x-1} \left[1 - \frac{C_{\mu}^{D}}{C_{N}^{D}} \right] \quad \text{dla} \quad D \leqslant x \leqslant N$$

Wzór interkoneksyjny Erlanga został ostatnio również stabelaryzowany, lecz w momencie jego podania przez Erlanga wydawało się niepraktyczne zastosowanie omawianej zależności. Dlatego też Erlang podał wzory przybliżone, które mogłyby być stosowane dla poszczególnych przypadków.

Wzór

$$E = \left(\frac{A}{N} \right)^{D}$$

podany został jako wzór przybliżony dla dużych wartości N oraz dużych wartości A, natomiast wzór

$$E = A^{D} \cdot \frac{/N - D/!}{N!}$$

z kolei dla małych wartości N i małych wartości A. Ten ostatni wzór przekształcony może być do następującej postaci:

$$E = \frac{A^{N}}{N!} e^{-A} \cdot \frac{A^{N-D}}{/N-D/!} e^{-A}$$

która wyraża natłok w omawianym układzie jako stosunek prawdopodobieństwa stanu zajętości N aparatów obsługi do prawdopodobieństwa stanu zajętości N-D aparatów obsługi przy rozkładzie Poissona /patrz rozdz. 2/.

4.3. Wzór O'Della do określenia liczby aparatów obsługi przy niepełnej dostępności do tych aparatów

Metodyka opracowana przez O'Della /1927 - [2,10] / opiera się na założeniu, że w układach komutacyjnych o cząstkowym zwielokrotnieniu wyjść średnie wykorzystanie aparatów obsługi rośnie od najmniejszej wartości występującej przy liczbie D tych aparatów do górnej wartości granicznej, występującej przy nieskończenie wielkiej liczbie aparatów obsługi N, zgodnie z założeniami Erlanga. W tej sytuacji najmniejsze średnie wykorzystanie ruchowe aparatów obsługi wynosi w rozpatrywanym układzie

$$a_D = \frac{A_D}{D}$$

podczas, gdy największe średnie wykorzystanie równa się:

$$a_s = \sqrt[D]{E_s}$$

gdzie E_s wyraża dopuszczalny natłok, dla którego również wyznaczone jest średnie natężenie ruchu A_D, które może być zaoferowane zbiorowi D aparatów obsługi.

W tej sytuacji średnie wykorzystanie aparatów obsługi w całym przedziale $D \leqslant N \leqslant \infty$ wynosi

$$a = a_D \frac{D}{N} + a_s \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right)$$

Średnie natężenie ruchu oferowane N aparatom obsługi przy dostępności D i natłoku E_s wyraża się:

$$A = A_D + \sqrt[D]{E_s} \; . \; /N-D/$$

Powyższy wzór może być praktycznie wykorzystywany do określania natężenia ruchu oferowanego A, gdy ruch ten wykazuje małe wahania, a więc jest określonym przez O'Della ruchem wyrównanym.

Ruch przypadkowy, który występuje w praktycznie najczęściej spotykanych układach telekomutacji umożliwia uzyskanie mniejszego średniego wykorzystania aparatów obsługi niż wynika to z propozycji Erlanga. O'Dell wprowadził więc dla ruchu przypadkowego następujące wyrażenie:

$$a_s = 0{,}53 \sqrt[D]{E_s} + 0{,}47 \frac{A_D}{D}$$

i ostatecznie uzyskał wzór do obliczania średniego natężenia ruchu przypadkowego A oferowanego N aparatom obsługi przy dostępności D i natłoku E_s:

$$A = A_D + \left(0{,}53 \sqrt[D]{E_s} + 0.47 \frac{A_D}{D}\right) . \; /N-D/ =$$

$$= A_D + \left(0{,}53 \sqrt[D]{E_s} + 0{,}47 \frac{A_D}{D}\right) N - 0{,}53 \sqrt[D]{E_s} \; .$$

$$. \; D - 0{,}47\, A_D = \left(0{,}53 \sqrt[D]{E_s} + 0{,}47 \frac{A_D}{D}\right) . \; N -$$

$$- 0{,}53 \left(\sqrt[D]{E_s} \; . \; D - A_D\right)$$

wyrażenie to podawane jest niejednokrotnie w postaci:

$$A = a \; . \; N - b$$

Tablica 3

$A = f/N/$ dla $D = 20$, $E_s = 0{,}01$ $N = 21\ldots150$ według wzoru O'Della
- ruch przypadkowy

N	A	N	A	N	A	N	A
21	12,73	36	23.29	51	33,84	66	44,40
22	13,44	37	24,09	52	34,55	67	45,10
23	14,14	38	24,70	53	35,25	68	45,81
24	14,87	39	25,40	54	35,96	69	46,51
25	15,55	40	26,10	55	36,66	70	47,22
26	16,25	41	26,81	56	37,36	71	47,92
27	16.96	42	27,51	57	38,07	72	48,62
28	17,66	43	28,22	58	38,77	73	49,33
29	18,36	44	28,92	59	39,47	74	50,03
30	19,07	45	29,62	60	40,18	75	50,73
31	19,77	46	30,33	61	40,88	76	51,44
32	20,47	47	31,03	62	41,59	77	52,14
33	21,18	48	31,73	63	42,29	78	52,84
34	21,68	49	32,44	64	42,99	79	53,35
35	22,59	50	33,14	65	43,70	80	54,25

c.d. tabl. 5

81	54,96	99	67,62	117	80,3	135	93,0
82	55,66	100	68,33	118	81,0	136	93,7
83	56,36	101	69,0	119	81,7	137	94,4
84	57,07	102	69,6	120	82,4	138	95,1
85	57,77	103	70,4	121	83,1	139	95,8
86	58,47	104	71,1	122	84,5	140	96,5
87	59,18	105	71,8	123	84,5	141	97,2
88	59,88	106	72,5	124	85,2	142	97,9
89	60,59	107	73,3	125	85,9	143	98,6
90	61,29	108	74,0	126	86,6	144	99,3
91	61,99	109	74,7	127	87,3	145	100,0
92	62,70	110	75,4	128	88,0	146	100,7
93	63,40	111	76,1	129	88,7	147	101,4
94	64.10	112	76,8	130	89,4	148	102,1
95	64,81	113	77,5	131	90,1	149	102,8
96	65,51	114	78,2	132	90,8	150	103,5
97	66,21	115	78,9	133	91,5		
98	66,92	116	79,6	134	92,3		

Tablica 6

$A_z = f/N, E_s/$

	E_s \ N	10	15	20	25	30	40	50	75	100
D=10	0,005	3,96	6,46	8,96		13,96	18,96	23,96	36,46	48,96
	0,01	4,42	7,13	9,84		15,26	20,68	26,10	39,65	53,20
	0,05	5,91	9,26	12,62		19,34	26,06	32,78	49,59	67,38
	0,1	6,76	10,45	14,15		21,45	28,75	36,05	54,30	72,55
	0,2	7,74	11,84	15,93		24,10	32,27	40,44	60,87	81,30
	0,3	8,35	12,68	16,99		25,62	34,25	42,88	64,46	86,03
	0,4	8,68	13,46	17,79		26,77	35,75	44,73	67,18	89,60
	0,5	9,14	13,74	18,36		27,59	36,82	46,05	69,13	92,20
D=20	0,005			11,09	14,44	17,78	24,47	31,16	47,88	64,61
	0,01			11,91	15,40	18,92	25,93	32,94	50,44	67,99
	0,05			14,50	18,49	22,47	30,44	38,41	58,31	78,21
	0,1			15,86	20,08	24,31	32,76	41,21	62,33	83,46
	0,2			17,31	21,79	26,27	35,23	44,19	66,59	88,99
	0,3			18,14	22,77	27,39	36,64	45,90	69,42	92,18

c.d. tabl. 6

	0,4			18,80	23,78	28,26	37,71	47,27	70,75	94,34
	0,5			19,09	23,89	28,69	38,30	47,90	71,91	95,93
D=40	0,005						27,38	35,25	54,95	74,65
	0,01						29,72	37,82	58,07	78,32
	0,05						32,86	41,64	63,59	85,54
	0,1						34,93	44,04	66,84	89,64
	0,2						36,92	46,35	69,95	93,55
	0,3						38,01	48,05	72,08	96,91
	0,4						38,63	48,35	72,95	97,55
	0,5						39,07	48,87	73,37	97,87

natomiast przekształceniem podawanym również w praktyce jest:

$$N = D + \frac{A - A_D}{a}$$

które może być wykorzystywane do określenia liczby aparatów obsługi /organów połączeniowych, łączy/.

Zależność między ruchem oferowanym A i liczbą aparatów obsługi N według wzoru O'Della dla ruchu przypadkowego przy dostępności D=20 i współczynniku strat $E_s = 0{,}01$ podano w tabl. 5.

Średnie natężenie ruchu załatwianego przez aparaty obsługi A_z, określone wg wzoru O'Della $A_z = A./1-E/$, przy różnej liczbie tych aparatów obsługi, dostępnościach D=10, D=20 i D=40, przy różnych współczynnikach strat E_s podane jest w tabl. 6.

4.4. Wzór Palma-Jacobaeusa i jego modyfikacja

Wzór Palma-Jacobaeusa podany wyżej do określenia prawdopodobieństwa stanu zajętości ściśle określonych aparatów obsługi podany w postaci:

$$E = \frac{E_N/A/}{E_{N-D}/A/}$$

może być używany jako wzór przybliżony do określania strat w układach o cząstkowym zwielokrotnieniu wyjść.

Praktyczna modyfikacja tego wzoru - nazywanego w skrócie mPJ - podana przez Lotzego jest następująca:

$$E = \frac{E_N/A_o/}{E_{N-D}/A_o/}$$

gdzie natężenie ruchu oferowanego A_o określone zostało przez Lotzego z pomocą następującej zależności

$$A_{oz} = A_z ,$$

gdzie: A_z oznacza natężenie ruchu załatwianego przez rozpatrywany zbiór N aparatów obsługi osiąganych w warunkach niepełnej dostępności D, a E oznacza współczynnik strat aktualny dla rozpatrywanego układu komutującego, podczas gdy A_{oz} oznacza natężenie ruchu fikcyjnego załatwianego przez N aparatów obsługi osiąganych w warunkach pełnej dostępności.

Przypomnijmy jeszcze, że

$$A_o = \frac{A_{oz}}{1-E}$$

Opracowane przez Lotzego tablice [16] zależności opisanych wzorem mPJ są praktycznie wykorzystywane przy określaniu liczby aparatów obsługi lub wielkości średniego natężenia ruchu w przypadku niepełnej dostępności do aparatów obsługi.

Według szeregu opublikowanych prac [23, 24, 26] wzór mPJ może być wykorzystany bezpośrednio do układu niejednorodnego, zrealizowanego jednak z wykorzystaniem przepleceń w warunkach wyrównanego obciążenia aparatów obsługi. W innych przypadkach wzór mPJ należy stosować z następującymi poprawkami:

$$A = A_{mPJ} - k \cdot \Delta a$$

Współczynnik k dla uproszczonego standardowego układu komutacji o cząstkowym zwielokrotnieniu stosowanego w NRF wynosi k = 0,3, a dla stopniowania zrealizowanego według zaleceń O'Della

Tablica 7

$a = f\ /N, D/$

D \ N	10	15	20	25	30	40	50	75	100	150	200	Uwagi
10	0,00	0,02	0,08	0,18	0,32	0,72	1,30	3,40	6,50	15,70	29,00	
20	-	-	0,00	0,01	0,04	0,12	0,30	1,00	2,10	5,50	10,50	
40	-	-	-	-	-	0,00	0,01	0,12	0,40	1,30	2,75	

Tablica 8

$A = f/N, E_s/$ dla $D = 10$

E_s \ N	10	15	20	30	40	50	75	100
0,5%	4,0	6,8	9,6	15,2	20,9	26,5	40,7	54,8
1%	4,4	7,4	10,4	16,4	22,3	28,2	42,7	57,0
3%	5,4	8,8	12,1	18,9	25,6	32,4	49,3	66,2

$A = f/N/$ dla $D = 20$ i $E_s = 1\%$

N	20	25	30	40	50	75	100
A	12,03	15,80	19,61	27,22	34,82	53,84	72,86
A_z	11,91	15,65	19,41	26,94	34,47	53,30	72,12
ΔA	0,06	0,25	0,54	1,12	1,68	3,11	4,53

ΔA - różnica między powyższym natężeniem A i natężeniem obliczonym wg teorii O'Della

$k = 1,1$. Współczynnik Δa, w zależności od N i D, podany został [24] w tabl. 7.

W ostatnim czasie znajdują również coraz częściej zastosowanie homogeniczne układy połączeń o skośnym zwielokrotnieniu wyjść. Układy te umożliwiły lepsze wykorzystanie aparatów obsługi niż inne układy. W tablicy 8 podano zależność między natężeniem ruchu A /względnie A_z/ oraz liczbą aparatów obsługi N przy D=10 i D=20 przy różnych wartościach E_s dla homogenicznego zwielokrotnienia wyjść.

4.5. Układy symetryczne pól stopniowanych realizowanych wg zaleceń O'Della

Układy ze stopniowaniem wyjść są realizowane w założeniu, że poszczególne grupy źródeł ruchu mają dostępność do poszczególnych zbiorów dróg pierwotnych o liczbie D, a z sumarycznej liczby dróg pierwotnych w rozpatrywanym systemie obsługi o liczbie D.g wyprowadzonych jest, drogą zastosowania stopniowania, N wyjść do aparatów obsługi. W układzie pola stopniowanego zwiększa się stopniowo równoległe łączenie dróg pierwotnych aż do pełnego dostępu od wszystkich źródeł ruchu do ostatnich aparatów obsługi. Drogi pierwotne o różnym zwielokrotnieniu między sobą nazywane są, według praktycznie stosowanej w telefonii nomenklatury, rodzajami styków w polu stopniowanym. Liczba rodzajów styków w normalnym polu stopniowanym zależna jest od liczby grup, na które podzielone są łącza przyjściowe /źródła ruchu/. W praktyce stwierdzono, że pożądany jest rozkład liczb g na możliwie dużo czynników pierwszych. Uzyskuje się wtedy więcej rodzajów styków, a wraz z tym lepszy rozkład obciążenia. Każda droga pierwotna osiągana jest przez odpowiedni zbiór łączy przyjściowych. Na rysunku jednak taka droga pierwotna pokazana jest tylko jako pojedynczy styk. W każdej grupie w omawianym tu symetrycznym polu stopniowanym występuje zazwyczaj ta sama liczba źródeł ruchu, a oferowany ruch telefoniczny przy równomiernym jego rozkładzie ma w każdej grupie jednakowe natężenie. Można wtedy powiedzieć, że ruch oferowany na pierwszy styk każdej grupy stanowi $\frac{1}{g}$ całkowitego ruchu A obsługiwanego przez N aparatów obsługi osiąganych poprzez to pole stopniowane.

W omawianym przykładzie pola stopniowanego występują cztery rodzaje styków: styki indywidualne, wspólne dla dwóch grup, wspólne dla trzech grup i wreszcie wspólne dla wszystkich sześciu grup.

Liczbę grup ustala się najczęściej dla poszczególnego przypadku z danej dostępności D oraz danej liczby aparatów obsługi N osiąganych za pośrednictwem danego pola stopniowanego.

W metodyce O'Della typowe układy pola stopniowanego wykorzystywane są przy liczbie aparatów obsługi:

$$D \leqslant N \leqslant N_m$$

gdzie: $N_m = 0,5\ g.D$, przy czym dla $g \leqslant 6$ dopuszczalne są większe wartości niż obliczone według tej zależności. Stosuje się mianowicie:

$$\text{dla } g = 2 \quad N_m = 1,6.D$$
$$\text{dla } g = 4 \quad N_m = 2,5.D$$
$$\text{dla } g = 6 \quad N_m = 3,2.D$$

W praktyce, gdy przy danej dostępności D mamy określoną ze wzoru O'Della liczbę aparatów obsługi N i trzeba określić minimalną liczbę grup źródeł ruchu dla przypadku, gdy $N > 3,2 . D$ korzysta się ze wzoru:

$$g_{min} = 2\frac{N}{D}$$

Faktycznie zastosowaną w układzie pola stopniowanego wartość g dobiera się jako liczbę całkowitą, bliską jednak wartości obliczonej według powyższych zależności, lecz uwzględniającą przy tym możliwie dobrą podzielność tej liczby g. Symetryczność pola stopniowanego powoduje preferowanie całkowitych liczb parzystych o jak największej liczbie całkowitych podzielników.

Ogólnie biorąc liczba g dzieli się przez szereg liczb całkowitych k_1, k_2, k_3 ... k_{n-1}, k_n. Sumaryczna liczba dzielników wynosi n, przy czym $k_1 = 1$, a $k_n = g$. Liczba rodzajów styków w polu stopniowanym jest n. Styków pierwszego rodzaju jest w każdej grupie w_1 sztuk, drugiego rodzaju w_2 sztuk ... n-tego rodzaju - w_n sztuk.

Na podstawie przykładu pola stopniowanego podanego w niniejszym opracowaniu można ułożyć dwa następujące równania:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 10 \quad \text{oraz}$$

$$6w_1 + 3w_2 + 2w_3 + w_4 = 27$$

Pierwsze z omawianych równań wiąże się z liczbą styków każdej grupy, a więc z dostępnością D. Drugie równanie wiąże się ściśle z całkowitą liczbą wyjść N z pola stopniowanego. Styki w_1 są wyprowadzone w odpowiedniej ilości dla każdej grupy, ogólna więc ich liczba przy 6 grupach jest $6w_1$. Styki w_2 są zwielokrotnione po dwa z dwóch sąsiednich grup i wobec tego ich liczba przy sześciu grupach jest $\frac{6}{2} w_2 = 3w_2$ itd.

Ogólne równanie dla pól stopniowanych mają następujące postacie:

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n = D$$

$$\frac{g}{k_1} \cdot w_1 + \frac{g}{k_2} \cdot w_2 + \ldots + \frac{g}{k_n} \cdot w_n = N$$

Powyższe dwa równania są aktualne dla wszystkich zwykłych przypadków pól stopniowanych i mogą być spełnione teoretycznie przez bardzo wiele zbiorów wartości $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Dowolny jednak dobór tych wartości nie powoduje dostatecznie dobrego wykorzystania aparatów obsługi osiąganych przez pole stopniowane i wtedy mówimy, że pole stopniowane nieprawidłowo spełnia swoje zadanie, którym powinno być uzyskanie możliwie wyrównanego obciążenia ruchowego aparatów obsługi. Dla każdej kombinacji $w_1, w_2 \ldots w_n$ można obliczyć sumę bezwzględnych wartości różnic wyrazów sąsiednich:

$$\left|w_1 - w_2\right| + \left|w_2 - w_3\right| + \ldots + \left|w_{n-1} - w_n\right| = R$$

Za najwłaściwsze rozwiązanie uważa się takie, przy którym wartość R jest najmniejsza, co sprowadza się praktycznie do uzyskania możliwie bliskich wartości sąsiednich wyrazów $w_1 \ldots w_n$.

Dla typowych pól stopniowanych, przy praktycznie stosowanych dostępnościach podane są odpowiednie tablice, zamieszczane również w obszernych fragmentach w niniejszej pracy.

Tablica 9

Tabele stopniowania D=20, g=2...10, N=21...100

N	g=2 indywi-dualne	wspólne
21	1	19
22	2	18
23	3	17
24	4	16
25	5	15
26	6	14
27	7	13
28	8	12
29	9	11
30	10	10
31	11	9
32	12	8

N	g=4 indy-widu-alne	po 2	wspól-ne
21	0	1	19
22	0	2	18
23	1	0	19
24	1	1	18
25	1	2	17
26	1	3	16
27	1	4	15
28	1	5	14
29	1	6	13
30	2	4	14
31	2	5	13
32	2	6	12
33	2	7	11
34	3	5	12
35	3	6	11
36	3	7	10

N	g=4 indy-widu-alne	po 2	wspól-ne
37	4	5	11
38	4	6	10
39	4	7	9
40	4	8	8
41	5	6	9
42	5	7	8
43	5	8	7
44	6	6	8
45	6	7	7
46	6	8	6
47	7	6	7
48	7	7	6
49	7	8	5
50	8	6	6

N	g=6 indy-widu-alne	po 2	po 3	wspól-ne
21	0	0	1	19
22	0	0	2	18
23	0	0	3	17
24	0	0	4	16
25	0	0	5	15
26	0	1	4	15
27	0	1	5	14
28	0	1	6	13
29	0	2	5	13
30	0	2	6	12
31	0	3	5	12
32	0	3	6	11
33	0	3	7	10

N	g=6			
	indywidualne	po 2	po 3	wspólne
34	0	4	6	10
35	0	4	7	9
36	0	5	6	9
37	1	3	6	9
38	1	3	7	9
39	1	4	6	9
40	1	5	5	9
41	2	3	5	10
42	2	3	6	9
43	2	4	5	9
44	2	4	6	8
45	2	4	7	7
46	3	3	5	9
47	3	3	6	8
48	3	4	5	8
49	3	4	6	7
50	3	5	5	7
51	3	5	6	6
52	3	6	5	6
53	4	4	5	7
54	4	4	6	6
55	4	5	5	6
56	4	5	6	5
57	4	6	5	5
58	5	4	5	6
59	5	5	4	6
60	5	5	5	5
61	5	5	6	4
62	5	6	5	4
63	6	4	5	5
64	6	5	4	5

N	g=8			
	indywidualne	po 2	po 4	wspólne
31	1	1	1	17
32	1	1	2	16
33	1	1	3	15
34	1	1	4	14
35	1	1	5	13
36	1	2	3	14
37	1	2	4	13
38	1	2	5	12
39	1	2	6	11
40	1	2	7	10
41	1	2	8	9
42	1	3	6	10
43	1	3	7	9
44	1	4	5	10
45	1	4	6	9
46	1	4	7	8
47	1	5	5	9
48	2	3	5	10
49	2	3	6	9
50	2	3	7	8
51	2	4	5	9
52	2	4	6	8
53	2	4	7	7
54	2	5	5	8
55	2	5	6	7
56	2	5	7	6
57	2	6	5	7
58	2	6	6	6
59	3	4	6	7
60	3	4	7	6
61	3	5	5	7
62	3	5	6	6
63	3	6	4	7
64	3	6	5	6
65	4	4	5	7

N	g=8 indywidualne	po 2	po 4	wspólne
66	4	4	6	6
67	4	4	7	5
68	4	5	5	6
69	4	5	6	5
70	4	6	4	6
71	4	6	5	5
72	5	4	5	6
73	5	4	6	5
74	5	5	4	6
75	5	5	5	5
76	5	5	6	4
77	5	6	4	5
78	5	6	5	4
79	6	4	5	5
80	6	4	6	4

N	g=10 indywidualne	po 2	po 5	wspólne
41	1	2	4	13
42	1	2	5	12
43	1	2	6	11
44	1	2	7	10
45	1	2	8	9
46	1	3	5	11
47	1	3	6	10
48	1	3	7	9
49	1	3	8	8
50	1	4	5	10
51	1	4	6	9
52	1	4	7	8
53	2	2	7	9
54	2	2	8	8
55	2	3	5	10
56	2	3	6	9
57	2	3	7	8
58	2	3	8	7
59	2	4	5	9
60	2	4	6	8
61	2	4	7	7
62	2	4	7	8
63	3	2	8	7
64	3	2	5	9
65	3	3	6	8
66	3	3	7	7
67	3	3	8	6
68	3	3	5	8
69	3	4	6	7
70	3	4	7	6
71	3	5	4	8
72	3	5	5	7
73	3	5	6	6
74	4	3	6	7
75	4	3	7	6
76	4	4	4	8
77	4	4	5	7
78	4	4	6	6
79	4	5	3	8
80	4	5	4	7
81	4	5	5	6
82	4	5	6	5
83	5	3	6	6
84	5	3	7	5
85	5	4	4	7
86	5	4	5	6
87	5	4	6	5
88	5	5	3	7
89	5	5	4	6

N	g=10 indywidualne	po 2	po 5	wspólne
90	5	5	5	6
91	6	3	5	6
92	6	3	6	5
93	6	4	3	7
94	6	4	4	6

N	g=10 indywidualne	po 2	po 5	wspólne
95	6	4	5	5
96	6	4	6	4
97	6	5	3	6
98	6	5	4	5
99	6	5	5	4
100	6	5	6	3

Poniżej podano w skrócie metodę rozwiązania równania, opartą w zasadzie na podanej w literaturze metodzie kolejnych prób. Jednak dzięki wstępnym obliczeniom i założeniom można liczbę tych prób nawet w bardzo skomplikowanych przypadkach istotnie zmniejszyć [11].

Dążeniem obliczającego jest znalezienie najmniejszej wartości R. Tą najmniejszą wartością R byłaby oczywiście wartość R=0. Taki jednak przypadek może mieć miejsce tylko wówczas, gdy: $w_1 = w_2 = w_3 = \ldots w_n = w$. Wtedy można by napisać, że

$$n \cdot w = d, \text{ a jednocześnie}$$

$$\left(\frac{g}{k_1} + \frac{g}{k_2} + \ldots + \frac{g}{k_n} \right) \cdot w = m \cdot w = N$$

W omawianym przypadku wielkości N i m są liczbami całkowitymi i spełniona jest proporcja:

$$\frac{N}{D} = \frac{m}{n}$$

którą można uważać za warunek konieczny i dostateczny do uzyskania wartości R=0.

Chociaż wartość R=0 można praktycznie uzyskać tylko dla niewielkiej liczby przypadków, jednak sprawdzenie na początku czy nie ma rozwiązania zerowego może znacznie uprościć rozwiązanie. Dzieli się więc najpierw D przez n oraz N przez m, aktualne dla danej liczby grup g. Ogólnie biorąc otrzymuje się dwa ułamki. Otrzymane wyniki można przedstawić w postaci liczby całkowitej oraz ułamka rzeczywistego.

$$\frac{D}{n} = w_a + \frac{\alpha}{n} \quad \text{oraz} \quad \frac{N}{m} = w_b + \frac{\beta}{m}$$

Mogą tu mieć miejsce trzy przypadki:

$$w_a = w_b = w$$

i wtedy równanie dla pola stopniowanego można napisać w postaci: $n.w+\alpha=D$ oraz $m.w+\beta=N$

$$w_a < w_b$$

przy czym $w_a = w$, $w_b = w+B$ i równania dla pola stopniowanego mają wówczas postać $n.w+\alpha=D$ oraz $m/w+B/ +\beta= m.w+\beta'=N$

$$w_a > w_b$$

przy czym $w_b=w$, $w_a=w+A$ i wtedy równania pola stopniowanego mają postać: $n/w+A/ +\alpha= n.w+\alpha'=D$ oraz $m.w+\beta= N$.

We wszystkich trzech przypadkach równania mają jednakową postać. Wartość w dobiera się zazwyczaj tak, że jest ona możliwie największą liczbą całkowitą, mniejszą jednak lub równą mniejszej z liczb uzyskanych z podziału $\frac{D}{n}$ oraz $\frac{N}{m}$. Dalsza manipulacja polega na zwiększeniu odpowiednich rodzajów styków tak, żeby równanie zostało spełnione. Dla omawianego wyżej przykładu pola stopniowanego o liczbie grup $g=4$, dostępności $D=10$ i liczbie wyjść $N=27$ otrzymujemy $\frac{10}{4} = 2,5$ oraz $\frac{27}{12} = 2,25$. Wynik ten świadczy, że nie ma rozwiązania $R=0$.

Przyjmując $w=2$ możemy z kolei napisać: $4.w+2=10$ oraz $12.w+3=$ $=27$. Równanie zostanie spełnione, gdy liczby styków w polu stopniowanym indywidualnych, łączonych po dwa, łączonych po trzy lub łączonych po sześć równolegle, których początkowo ustaliliśmy po dwa każdego rodzaju, a więc, których jest w sumie osiem w każdej grupie, powiększymy o dwa w ten sposób, że ogólna liczba wyjść wzrośnie o trzy. W omawianym przypadku żądany rezultat otrzymujemy między innymi wtedy, gdy: $w_1=2$; $w_2=2$; $w_3=3$; $w_4=3$, co daje w wyniku $R=1$.

4.6. Cząstkowe zwielokrotnienia standardowe

Omawiane zwielokrotnienia [23] są zwielokrotnieniami przemieszanymi, dzięki czemu cechują się dużą obciążalnością ruchową. Rozwój ich standaryzacji zmierzał do uproszczenia struktury oraz zmniejszenia nakładów pracy przy wykonaniu nowego zwielokrotnienia lub rozbudowy istniejącego. Uproszczone zwielokrotnienia standardowe zrealizowane są w założeniu uzyskania kompromisu pomiędzy dużą obciążalnością i możliwie dużą prostotą struktury. Budowa wielokrocia standardowego /rys. 3/ dla dostępności $D=10$ i liczbie grup $g > D$ zrealizowana jest w założeniu, że w jednym ciągu zwielokrotnienia może występować 10 styków przy zastosowaniu skośnego okablowania z odpowiednim ustalonym poskokiem rozciągniętym na 13 grup. Takie połączenie, przy oznaczaniu numerami od 1 do 13 poszczególnych grup, przebiega następująco:

1	1	4	2	3	7	5	6	10	12	13
2	2	5	3	4	8	6	7	11	13	1
3	3	6	4	5	8	7	8	12	1	2
.										
.										
.										
12	12	2	13	1	5	3	4	8	10	11
13	13	3	1	2	6	4	5	9	11	12

Omawianych 13 ciągów zwielokrotnienia styków przy 13 grupach zrealizowany zostaje każdy od pierwszego do dziesiątego styku wielokrocia przy zastosowaniu następującego ciągu poskoków:

3, -2, 1, 4, -2, 1, 4, 2, 1

W omawianym wielokrociu mamy 13 wyjść, tzn. liczba wyjść jest równa 1.g i równolegle połączonych jest po 10 styków. Zwiększenie pojemności wyjściowej wielokrocia realizuje się przez rozłączanie połączeń między sąsiednimi stykami. Najpierw rozłączeniu podlegają styki czwarte i piąte. Po rozłączeniu wszystkich połączeń między stykami 4-5, styki w omawianym polu są połączone w dwóch zbiorach ciągów: w jednym po 13x4 styków i w drugim 13x6 styków. Pojemność wyjściowa wielokrocia jest wtedy 2xg i wynosi w omawianym przypadku 26 wyjść. Jeżeli z kolei dokona się rozłączenia połączenia między stykami 2 i 3, wtedy będziemy mieli 13 ciągów połączonych po dwa i jeszcze raz 13 ciągów po dwa oraz 13 ciągów połączonych po sześć. Pojemność wielokrocia wynosi 3xg, tzn. 39 wyjść. Dalsze rozłączenie dokonuje się między stykami szóstymi i siódmymi i wtedy tworzą się 3x13 ciągów po dwa styki i 13 ciągów po 4 styki połączone równolegle. Pojemność wielokrocia jest 4.g, co w danym przypadku daje 52 wyjść.

Wreszcie ostatnie rozłączenie, które można dokonać w omawianym przykładzie wielokrocia jest rozłączeniem między stykami pierwszymi i drugimi. Mamy wtedy 2x13 styków indywidualnych branych do pracy w pierwszej kolejności, 2x13 ciągów po dwa styki połączone równolegle, brane do pracy w drugiej kolejności, i w końcu 13 ciągów po 4 styki. To ostatnie rozwiązanie ma pojemność wyjściową 5xg, a więc ogółem 65 /rys. 4/.

W uproszczonym zapisie omawiane układy zwielokrotnienia, z zapisanym tylko jednym szeregiem połączonych styków, mogą być pokazane następująco:

Kolejność rozłączania		4	2		1	3					
Poskok		3	/-2/	1	4	/-2/	1	4	2	1	
Numer styku		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Numer grupy	11	1	4	2	3	7	5	6	10	1	2
przy liczbie grup	12	1	4	2	3	7	5	6	10	12	1
	13	1	4	2	3	7	5	6	10	12	13
	14	1	4	2	3	7	5	6	10	12	13

itd., itd.

Zgodnie z zasadami rozwiązania przy 11 grupach możemy mieć 11÷55 wyjść, przy 12 grupach 12÷60 wyjść, przy 13 grupach 13÷65 wyjść, przy 14 grupach 14÷70 itd.

Przy dostępności 10 i liczbie grup zawierającej się między 6 i 12 /11 i 12 może być realizowane zarówno wg poprzednio jak i obecnie pokazanej zasady/ połączenie styków wielokrocia realizuje się z zastosowaniem nieco innego ciągu poskoków, a mianowicie:

3, -2, 1, 4, -2, 1, 4, -2 i 1

Otrzymujemy przy tym następujące połączenia:

Kolejność rozłączania 4 2 1 3

Poskok 3 /-2/ 1 4 /-2/ 1 4 /-2/ 1

Numer styku		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Numer grupy	6	1	4	2	3	1	5	6	4	2	3
przy liczbie	7	1	4	2	3	7	5	6	3	1	2
grup	8	1	4	2	3	7	5	6	2	8	1
	9	1	4	2	3	7	5	6	1	7	8
	10	1	4	2	3	7	5	6	10	8	9
	11	1	4	2	3	7	5	6	10	8	9
	12	1	4	2	3	7	5	6	10	8	9

Liczba wyjść, którą otrzymujemy w omawianym układzie jest następująca:

grup	wyjść
6	6 ... 30
7	7 ... 35
8	8 ... 40
9	9 ... 45
10	10 ... 50
11	11 ... 55
12	12 ... 60

Dla mniejszej liczby grup przy dostępności 10, a więc dla 2, ..., 5 grup, a w szczególnych przypadkach również i dla sześciu grup stosuje się zawsze tylko poskok 1 i wtedy uzyskujemy następujące połączenia:

Kolejność rozłączania			4		2			1			3				
Numer styku		1		2		3	4		5	6		7	8	9	10
Numer grupy	2	1		2		1	2		1	2		1	2	1	2
przy liczbie	3	1		2		3	1		2	3		1	2	3	1
grup	4	1		2		3	4		1	2		3	4	1	2
	5	1		2		3	4		5	1		2	3	4	5
	6	1		2		3	4		5	6		1	2	3	4

Liczba wyjść, którą otrzymujemy w tym przypadku wynosi dla dwóch grup: 2...10; dla trzech grup: 3...15; dla 4 grup: 4...20, 5 grup: 5...25 i dla sześciu grup: 6...30.

Przy dostępności 20 stosuje się podobną zasadę łączenia styków z -poskokiem jak przy pojemności 10, lecz ciąg poskoków jest tu odpowiednio dłuższy. Poczynając od liczby grup g=11 może być stosowany następujący ciąg poskoków: 1, 3, -2, 1, 4, -2, 1, 4, -2, 1, 4, -2, 1, 4, -2, 1, 4, 2, 1. Podstawowy ciąg połączeń 4 /lub trzy/, -2 /lub 2/ oraz 1 powtarza się tu sześć razy. Zanotować możemy przy tym następujący ciąg połączeń pokazany w tabl. 10.

Przy najmniejszej liczbie wyjść równej 1.g połączonych jest równolegle 20 styków. Pierwsze rozłączenie realizuje się między stykiem 8 i 9 i wtedy powstają dwa ciągi, jeden o ośmiu połączonych równolegle stykach i drugi o dwunastu. Liczba wyjść jest wtedy 2g. Rozłączając 1 i 2 mamy liczbę wyjść 3g, a połączonych jest po 4, 4 i 12 styków. Przy rozłączeniu 1 do 3: 4g wyjść i połączone są styki po 4, 4, 4 i 8. Po rozłączeniu 1 do 4 mamy 5g wyjść z pola i połączonych jest równolegle 5 razy po 4 styki. Rozłączenia 5, 6 i 7

Tablica 10

Zwielokrotnienie standardowe dla D=20

Kolejność rozłączania			8	5	9	2		6		1		7		3				4			
Poskok			1	3	-2	1	4	-2	1	4	-2	1	4	-2	1	4	-2	1	4	2	1
Numer styku		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Numer grupy przy liczbie grup	10	1	2	5	3	4	8	6	7	1	9	10	4	2	3	7	5	6	10	2	3
	11	1	2	5	3	4	8	6	7	11	9	10	3	1	2	6	4	5	9	11	1
	12	1	2	5	3	4	8	6	7	11	9	10	2	12	1	5	3	4	8	10	11
	15	1	2	5	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12	13	2	15	1	5	7	8
	20	1	2	5	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12	13	17	15	16	20	2	3
	21	1	2	5	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12	13	17	15	16	20	1	2
	22	1	2	5	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12	13	17	15	16	20	22	1
	23	1	2	5	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12	13	17	15	16	20	22	23
	24	1	2	5	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12	13	17	15	16	20	22	23

itd.

mają na celu rozbicie pierwszych trzech połączeń po 4 styki na 6 połączeń po dwa styki, dając odpowiednią liczbę wyjść z pola 6g, 7g i 8g. Wreszcie ostatnie dwie możliwości rozłączenia 8 i 9 mają na celu rozbicie dwóch pierwszych połączeń po 2 styki na 4 styki indywidualne, dając przy tym zwiększoną pojemność odpowiednio najpierw do 9g, a potem do 10 g. Cząstkowe zwielokrotnienie uproszczone standardowe dla pojemności D=20 przy liczbie grup g=12 /rys. 5/ daje maksymalną liczbę wyjść 120.

Przy mniejszej liczbie grup, to znaczy poniżej g=10, przy dostępności D=20 stosuje się nieco inny ciąg poskoków, podobnie jak przy dostępności D=10.

4.7. Wielokrocie cząstkowe homogeniczne

Zwielokrotnienie homogeniczne realizowane jest przede wszystkim wtedy, gdy liczymy się w zasadzie z jednakowym obciążeniem ruchowym poszczególnych styków w drogach pierwotnych. Zwielokrotnienie to ma dawać dalsze wyrównanie obciążenia ruchowego, przy czym liczba połączeń równoległych między stykami poszczególnych grup powinna być w miarę możliwości taka sama. Dalszą wreszcie cechą wielokrocia homogenicznego jest jednakowa liczba połączonych równolegle styków dla każdego wyjścia. Jeżeli takie połączenia jednakowe są niemożliwe, wtedy dopuszcza się różnicę o 1. Poza szczególnymi przypadkami, wielokrocie homogeniczne może mieć co najwyżej 0,5.g.D wyjść, podobnie jak inne wielokrocia stopniowane. Dzieląc g.D przez N otrzymujemy ogólnie biorąc liczbę niecałkowitą. Na przykład g=7; D=30 i N=49: $\frac{210}{49} \approx 4,3$. W omawianym przypadku zwielokrotniać się będzie po 4 i po 3 styków.

Ogólnie biorąc, jeżeli z podzielenia $\frac{gD}{N}$ otrzymujemy liczbę w, to liczby styków, które podlegają zwielokrotnieniu w_1 i w_2 będą: w_1 pierwsza najbliższa liczba całkowita mniejsza od w, oraz w_2 najbliższa liczba całkowita większa od w. Z każdych w_1 styków połączonych równolegle otrzymujemy przy g grupach tylko g wyjść. Analogicznie z każdych w_2 styków połączonych równolegle będzie również g wyjść. Jeżeli takich zbiorów połączonych po w_1 styków mielibyśmy a i zbiorów po w_2 styków mielibyśmy b, wtedy spełnione byłyby dwa następujące równania:

$$a \cdot w_1 + b \cdot w_2 = D \quad \text{oraz}$$

$$/a + b/\ g = N$$

Biorąc pod uwagę, że $w_2 = w_1 + 1$ otrzymujemy po obliczeniu liczbę zbiorów styków łączonych równolegle po w_1:

$$a = \frac{N}{g} \cdot w_2 - D$$

oraz liczbę zbiorów styków łączonych równolegle po w_2:

$$b = D - \frac{N}{g}\ w_1$$

dla wyżej podanego przykladu $a = \frac{49}{7} \cdot 5 - 30 = 5$; oraz $b = 30 - \frac{49}{7} \cdot 4 = 2$. Spośród D=30 styków 5.4=20 połączonych jest w pięciu zbiorach po cztery styki oraz 2.5=10 styków połączonych jest w dwóch zbiorach po 5 styków.

Jak wspomniano wyżej, połączenia między stykami powinny być tak opracowane, aby jednakową ilość razy były połączone styki danej grupy z każdą z pozostałych grup. W omawianym więc przykładzie siedmiu grup styki grupy pierwszej powinny być w miarę możliwości połączone równolegle jednakową liczbę razy ze stykami pozostałych sześciu /2...7/ grup. Biorąc pod uwagę, że wielokrocie jest symetryczne , wystarczy sprawdzić , że styki jednej z grup połączone są jednakową ilość razy ze stykami wszystkich pozostałych grup. Możemy mieć wtedy pewność, że jednakowa ilość połączeń dotyczy wszystkich grup. ..

Najczęściej spotykane liczby łączonych równolegle styków są od 2 do 5. Przykładowo przy g=7, gdy zastosujemy połączenie równolegle po dwa styki, możemy mieć następujący wynik zapisany symbolicznie:

a/	1 2	b/	1 3	c/	1 4	d/	1 5	e/	1 6	f/	1 7
	2 3		2 4		2 5		2 6		2 7		2 1
	3 4		3 5		3 6		3 7		3 1		3 2
	4 5	lub	4 6	lub	4 7	lub	4 1	lub	4 2	lub	4 3
	5 6		5 7		5 1		5 2		5 3		5 4
	6 7		6 1		6 2		6 3		6 4		6 5
	7 1		7 2		7 3		2 4		7 5		7 6

W omawianym przypadku możemy mieć sześć kombinacji połączeń, przy czym a/ i f/ , b/ i e/ oraz d/ i c/ mają odpowiadające sobie łączenia styków między tymi samymi grupami. Jeżeli dla skrócenia podany zostanie symbol połączenia pierwszego styku pierwszej grupy odpowiednio 12; 13 lub 14, można w łatwy sposób zorientować się, jak wygląda omawiane zwielokrotnienie /rys. 6 oraz tabl. 11/.

W przypadku łączenia po trzy styki z różnych grup równolegle mogą być stosowane połączenia o symbolicznych oznaczeniach 123, 124, 125, 135 itd. Przy czterech stykach łączonych równolegle:

Tablica 11

Tabele typowych zwielokrotnień cząstkowych skośnych

D=20, g=3...10, N=21...100

N	g=3 symbol	liczba
21	123	6
	12	1
24	123	4
	12	4
27	123	2
	12	7
30	12	10

N	g=4 symbol	liczba
24	1234	2
	123	4
28	123	6
	12	1
32	123	4
	12	3
	13	1
36	123	2
	12	5
	13	2
40	12	7
	13	3

N	g=5 symbol	liczba
25	1234	5
30	1234	2
	123	2
	124	2
35	123	3
	124	3
	12	1
40	123	2
	124	2

N	g=5 symbol	liczba
	12	2
	13	2
45	123	1
	124	1
	12	4
	13	3
50	12	5
	13	5

N	g=6 symbol	liczba
24	12345	4
30	1234	2
	1235	2
	1245	1
36	1234	1
	1235	1
	123	1
	124	3
42	123	2
	124	4
	13	1
48	123	1
	124	3
	12	2
	13	2
54	123	1
	124	1
	12	2
	13	3
	14	2
60	12	4
	13	4
	14	2

c.d. tabl. 11

N	g=7 symbol	liczba
21	1234567	2
	123456	1
28	12345	2
	12346	1
	12356	1
35	1235	5
42	1235	2
	124	4
49	124	6
	12	1
56	124	4
	12	2
	13	1
	14	1
63	124	2
	12	3
	13	2
	14	2
70	12	4
	13	3
	14	3

	g=8	
24	1234567	2
	123456	1
32	12346	2
	12356	1
	12357	1
40	1234	1
	1235	1
	1236	1
	1246	2
48	1235	1
	1246	1
	124	2
	125	2

N	g=8 symbol	liczba
56	124	3
	125	2
	135	1
	12	1
64	124	2
	125	1
	135	1
	12	2
	13	1
	14	1
72	124	1
	125	1
	12	2
	13	3
	14	1
	15	1
81	12	3
	13	3
	14	3
	15	1

	g=9	
27	1234578	1
	1234678	1
	123457	1
36	12356	4
	12358	4
45	1235	3
	1257	2
54	1235	1
	1257	1
	124	1
	125	2
	135	1
63	124	2
	125	3

c. d. tabl. 11

N	g=9 symbol	liczba
	135	1
	13	1
72	124	1
	125	2
	135	1
	12	1
	13	1
	14	1
	15	1
81	124	1
	125	1
	12	2
	13	3
	14	1
	15	1
90	12	3
	13	3
	14	3
	15	1

	g=10	
30	1234568	2
	123578	1
40	12347	1
	12359	1
	12457	1
	12368	1
50	1245	2
	1246	1
	1268	2
60	1245	1
	1268	1
	124	1
	126	1
	135	1
	136	1

N	g=10 symbol	liczba
70	124	1
	125	2
	126	1
	135	1
	136	1
	12	1
80	124	1
	125	1
	126	1
	135	1
	12	1
	13	1
	14	1
	16	1
90	124	1
	126	1
	12	1
	13	2
	14	2
	15	2
100	12	3
	13	2
	14	2
	15	2
	16	1

1234, 1235, 1245, 1246, 1256 itd. oraz przy pięciu stykach: 12345, 12346, 12356, 12456 itd. Podkreślmy jeszcze raz, że przy omawianym zwielokrotnieniu skośnym z jednego zbioru styków łączonych równolegle w omawianym polu wielokrotnym mamy zawsze tyle wyjść, ile grup wchodzi do danego zwielokrotnienia. Ponieważ bardzo ważną dla nas sprawą jest połączenie równolegle styków jednakową ilość razy każdej grupy z każdą, należy zwrócić uwagę na właściwy dobór połączeń styków różnych grup /tabl. 12/.

Wracając do omawianego przykładu, w którym ma być pięć połączonych styków po cztery i dwa po pięć przy siedmiu grupach, można na podstawie powyższej ogólnej tablicy napisać:

1 do	2	3	4	5	6	7
1234	3	2	1	1	2	3
1235	2	2	2	2	2	2
1245	2	1	3	3	1	2
1246	1	3	2	2	3	1
1256	2	1	3	3	1	2
12345	4	3	3	3	3	4
12346	3	4	3	3	4	3
12356	3	3	4	4	3	3
13456	3	4	3	3	4	3

Z przytoczonych danych widać, że nie można dobrać takich pięciu zwielokrotnień po cztery i jednocześnie takich dwóch po pięć, aby jednakową liczbę razy połączone były wszystkie grupy ze sobą; natomiast dopuszczając różnicę o 1 można wybrać następujące roz-

Tablica 12

Połączenia między grupami w wielokrociu homogenicznym

1 do	2	3	4	5	6	g-4	g-3	g-2	g-1	g
12	1	-	-	-	-	-	-	-	-	1
13	-	1	-	-	-	-	-	-	1	-
14	-	-	1	-	-	-	-	1	-	-
15	-	-	-	1	-	-	1	-	-	-
16	-	-	-	-	1	1	-	-	-	-
123	2	1	-	-	-	-	-	-	1	2
124	1	1	1	-	-	-	-	1	1	1
125	1	-	1	1	-	-	1	1	-	1
135	-	2	-	1	-	-	1	-	2	-
1234	3	2	1	-	-	-	-	1	2	3
1235	2	2	1	1	-	-	1	1	2	2
1245	2	1	2	1	-	-	1	2	1	2
1246	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1
1256	2	-	1	2	1	1	2	1	-	2
12345	4	3	2	1	-	-	1	2	3	4
12346	3	3	2	1	1	1	1	2	3	3
12356	3	2	2	2	1	1	2	2	2	3
13456	3	3	2	1	1	1	1	2	3	3

wiązanie: 5 x "1235" i 1 x "12345" i 1 x "12346". Wtedy pierwsza grupa połączona byłaby po 17 razy z grupami 2, 3, 6 i 7 oraz po 16 razy z grupami 4 i 5.

Najczęściej spotyka się dostępność 20. Przy tej dostępności mogą występować następujące kombinacje styków oraz następująca liczba wyjść z pola wielokrotnego:

Styków w zbiorze	10	7	6	5	4	3	2	
Liczba zbiorów styków	2	-	-	-	-	-	-	2xg wyjść
	-	2	1	-	-	-	-	3xg "
	-	-	-	4	-	-	-	4xg "
	-	-	-	-	5	-	-	5xg "
	-	-	-	-	2	4	-	6xg "
	-	-	-	-	-	6	1	7xg "
	-	-	-	-	-	4	4	8xg "
	-	-	-	-	-	2	7	9xg "
	-	-	-	-	-	-	10	10xg "

Przykładowo przy liczbie grup 7 i dostępności D=20 moglibyśmy uzyskiwać przy omawianym polu homogenicznym 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63 i 70 wyjść.

Można również uzyskiwać pośrednie wartości wyjść między podanymi, lecz wtedy zwielokrotnienie nie jest w pełni homogeniczne. Połączenia niezgodne z zasadami rozwiązania omawianego pola homogenicznego są stosowane w minimalnej ilości /np. w jednej kolumnie spośród D/.

Zwielokrotnienie homogeniczne skośne zrealizowane według omawianej zasady daje możliwie najlepsze i wyrównane obciążenie ruchowe wyjść, jednak wykonanie takiego zwielokrotnienia niemożliwe jest zazwyczaj za pomocą gołego drutu na płaskiej łączówce. Dlatego też w praktyce spotykane jest również zwielokrotnienie homogeniczne uproszczone, w którym większość połączeń może być zrealizowana gołymi drutami, ale zwielokrotnienie takie daje gorsze wykorzystanie ruchowe wyjść. Zwróćmy uwagę /rys. 7/, że przy wielokrociu homogenicznym skośnym stosuje się różne typy połączeń, aby uzyskać jednakową liczbę połączeń między grupami. Przy wielokrociu homogenicznym uproszczonym połączenia są ułożone tak, aby większość z nich była możliwa do realizacji między sąsiednimi stykami w pionie za pomocą gołych przewodów, natomiast tylko połączenia krańcowe między stykami realizuje się drutem izolowanym. Jednocześnie nie stosuje się różnych typów zwielokrotnień przy tej samej liczbie zwielokrotnionych styków. W związku z tym, przy zastąpieniu wielokrocia homogenicznego skośnego przez wielokrocie homogeniczne uproszczone trzeba się liczyć z nieco gorszym wykorzystaniem ruchowym wyjść, podobnie jak to ma miejsce między idealnym zwielokrotnieniem i wielokrociem uproszczonym standardowym.

5. UKLADY WIELOSEKCYJNE

5.1. Zasady metody Jacobaeusa

Dwusekcyjny układ komutujący umożliwia zestawianie połączeń między łączami przyjściowymi i wyjściowymi za pomocą dwóch po sobie następujących układów komutacji: jednego między łączami przyjściowymi i łączami pośrednimi i drugiego między łączami pośrednimi i łączami wyjściowymi.

Łącza przyjściowe mogą być rozpatrywane jako źródło ruchu. Ruch z nich podawany jest najpierw na drogi pośrednie, a następnie z tych dróg pośrednich do aparatów obsługi. W najprostszym przypadku mamy zbiór n źródeł ruchu, które komutowane są z m drogami pośrednimi, a każda droga pośrednia z różnymi aparatami obsługi. Dla uzyskania dojścia od źródła ruchu do aparatu obsługi konieczna jest nie tylko swoboda odpowiedniego aparatu obsługi, lecz również takiej drogi pośredniej, która prowadzi od danego źródła ruchu do danego aparatu obsługi.

W omawianym układzie /rys. 8/ natłok może występować przy stanie zajętości części dróg pośrednich /choć odpowiadające im aparaty obsługi są wolne/ i przy stanie zajętości części innych aparatów obsługi /choć drogi pośrednie prowadzące do nich są wolne/ oraz jednoczesnym stanie zajętości pozostałych dróg pośrednich i "odpowiadających im" aparatów obsługi. Szczegółowy opis prawdopodobieństwa rzeczywistych przypadków zajętości jest bardzo złożony i praktycznie prosty opis, który zaproponował Jacobaeus [13], [14], [17], został zrealizowany w założeniu niezależności prawdopodobieństwa zajętości w zbiorze dróg pośrednich i w zbiorze aparatów obsługi. Takie założenie wymaga przyjęcia dla jednego zbioru prawdopodobieństwa zajętości dowolnych, np. p dróg, i dla drugiego zbioru prawdopodobieństwa zajętości ściśle określonych /ale nie odpowiadających wymienionym p drogom/ m-p dróg. Ogólny wzór wyrażający prawdopodobieństwo natłoku przy wspomnianych założeniach jest następujący:

$$E_L = \sum G/p/ \,.\, H/m-p/$$

Przy określaniu funkcji G/p/ i H/m-p/ mogą być brane pod uwagę, według propozycji Jacobaeusa, w zasadzie dwa rozkłady: Bernoulliego lub Erlanga. Pierwszy z nich przyjmowany jest wówczas, gdy liczba źródeł S jest mniejsza lub równa liczbie aparatów obsługi względnie dróg pośrednich. Drugi natomiast przyjmowany jest w przypadku dużej liczby źródeł ruchu i większej od liczby aparatów obsługi /$S \gg N$/.

W przypadku rozkładu Bernoulliego podstawowe wzory mogą być zapisane:

$$G/p/ = C_n^p \, a^p \, /1-a/^{n-p}$$

lub

$$G/m-p/ = C_m^{m-p} \, a^{m-p} \,.\, /1-a/^{n-m+p}$$

oraz

$$H/p/ = \frac{C_n^p}{C_n^p} \, a^p$$

lub

$$H/m-p/ = \frac{C_n^{m-p}}{C_m^{m-p}} \, a^{m-p}$$

gdzie:

n - jest liczbą łączy przyjściowych do układu komutującego /źródeł ruchu/;

m - liczbą łączy wyjściowych układu komutującego /aparatów obsługi;

a - średnie wykorzystanie źródeł ruchu.

W przypadku rozkładu Erlanga mogą być zapisane odpowiednie wzory:

$$G/p/ = E_m/A/ \frac{m!}{A_m} \frac{A^p}{p!}$$

lub

$$G/m-p/ = E_m/A/ \frac{m!}{A^p/m-p/!}$$

oraz

$$H/p/ = \frac{E_m/A/}{E_{m-p}/A/}$$

lub

$$H/m-p/ = \frac{E_m/A/}{E_p/A/}$$

Pierwsze rozważanie Jacobaeusa dotyczy układu dwusekcyjnego bez ekspansji i kompresji, to znaczy przypadku, kiedy n=m, a średnie wykorzystanie dróg pośrednich b jest równe średniemu wykorzystaniu źródeł ruchu a. Biorąc pod uwagę, że liczby źródeł ruchu n i dróg pośrednich m są niewielkie, do elementarnych zbiorów, na które dzielone są źródła ruchu, można zastosować tu obliczenie za pomocą rozkładu Bernoulliego. Z kolei biorąc pod uwagę, że do aparatów obsługi w liczbie n podawany jest ruch z wielu zbiorów źródeł ruchu /za pośrednictwem dróg pośrednich każdego zbioru źródeł ruchu/ można przyjąć do określenia stanu zajętości wyjść rozkład Erlanga. W ten sposób natłok w układzie dwusekcyjnym określa się przy jednoczesnym wykorzystaniu rozkładu Bernoulliego i Erlanga. Określenie natłoku może nastąpić według następującego wzoru:

$$E_L = \sum_{p=0}^{m} E_m/A/ \frac{m!}{A^m} \frac{A^p}{p!} b^{m-p} = \frac{E_m/A/ m! b^m}{A^m} \sum_{p=0}^{m} \frac{A^p}{p! b^p} =$$

$$= \frac{E_m/A/}{\frac{A}{b}^m \frac{1}{m!}} \sum_{p=0}^{m} \left(\frac{A}{b}\right)^p \cdot \frac{1}{p!} = \frac{E_m/A/}{E_m\left(\frac{A}{b}\right)}$$

Otrzymany wynik napiszemy w nieco innej postaci, a mianowicie:

$$E_L = \frac{1}{E_m\left(\frac{A}{b}\right)} \cdot E_m/A/ = \beta \cdot E_m/A/$$

Wielkość $E_m/A/$ wyraża natłok występujący w przypadku obsługiwania strumienia ruchu A przez zbiór m aparatów obsługi w warunkach pełnej dostępności do tych aparatów obsługi i wyrażony za pomocą pierwszej funkcji Erlanga.

Współczynnik β może być również określony za pomocą tablic dla pierwszej funkcji Erlanga, gdy znane jest natężenie ruchu A i średnie wykorzystanie drogi pośredniej b; podaje on mnożnik większy od jedności, za pomocą którego można określić, ile razy natłok w przypadku osiągania aparatów obsługi poprzez układ dwusekcyjny jest większy niż w przypadku bezpośredniego dostępu źródeł ruchu do aparatów obsługi. To zwiększenie natłoku w układzie dwusekcyjnym jest związane z tak zwaną blokadą wewnętrzną, występującą w niektórych układach dwusekcyjnych, a wynikającą z tego, że choć dany aparat obsługi jest wolny, nie jest on widziany przez konkretne źródło ruchu jako wolny, bo droga pośrednia, z której musi korzystać dane źródło ruchu, jest aktualnie zajęta.

W omawianym przypadku n=m i a=b współczynnik β wyraża się również w postaci:

$$\beta = \frac{1}{E_n\left(\frac{A}{a}\right)} .$$

Wzór

$$E_L = \frac{E_m/A/}{E_n\left(\frac{A}{a}\right)}$$

jest wzorem obecnie najczęściej zalecanym do określenia natłoku w przypadku dojścia do aparatów obsługi poprzez dwusekcyjny układ komutacyjny o następujących parametrach:

n - liczba źródeł ruchu w elementarnym zbiorze,

a - średnie wykorzystanie źródła ruchu w tym zbiorze,

m - liczba dróg pośrednich i liczba wyjść, to znaczy aparatów obsługi elementarnego zbioru tych aparatów,

A - średnie natężenie ruchu podawanego poprzez układ dwusekcyjny na dany zbiór m aparatów obsługi.

Według podobnego wzoru może być określone również prawdopodobieństwo strat:

$$\beta_s = \frac{1}{E_{n-1}\left(\frac{A}{a}\right)}$$

Gdy przez układ dwusekcyjny o m drogach pośrednich w elementarnym zbiorze ma być osiągniętych q.m aparatów obsługi, można powiedzieć, że dany zbiór aparatów obsługi składa się z m podzbiorów po q aparatów. Do każdego takiego podzbioru istnieje tylko jedna droga pośrednia od źródła ruchu. Wprowadzając pewne uproszczenia, polegające na uporządkowanym stanie zajętości aparatów obsługi, zakłada się, że w danym zbiorze aparatów obsługi przy stanie zajętości m /q-1/ aparatów występuje zawsze taki rozkład stanu zajętości, że każda droga pośrednia "widzi" co najmniej jeden wolny aparat obsługi. Dopiero więc, gdy liczba zajętych aparatów obsługi jest większa niż m./q-1/, mogą występować przypadki braku wolnych aparatów obsługi za swobodnymi łączami pośrednimi. Wykorzystując te założenia stwierdza się, że przyczyny natłoku, gdy w zbiorze aparatów obsługi jest zajętych mniej niż m/q-1/ aparatów, są inne i inne są przyczyny natłoku, gdy zajętych jest więcej niż m./q-1/ aparatów. Przyczyną natłoku mianowicie w pierwszym przypadku może być jedynie stan zajętości wszystkich dróg pośrednich, a w drugim przypadku - stan zajętości x określonych spośród pozostałych m aparatów obsługi oraz ściśle określonych /m-x/ dróg pośrednich. Operując tymi założeniami i wprowadzając pewne dalsze uproszczenia otrzymuje się wzór do określenia natłoku w postaci:

$$E_L = \frac{E_{mq}/A/}{E_{nq}\left(\frac{A}{a}\right)}$$

do określenia natłoku

$$\beta = \frac{1}{E_{mq}\left(\frac{A}{a}\right)}$$

oraz do określenia strat:

$$\beta_s = \frac{1}{E_{/n-1/\cdot q}\left(\frac{A}{a}\right)}$$

Ostatnio podany wzór jest najbardziej powszechnie używanym wzorem dla przypadku wyboru grupowego od dowolnej liczby źródeł ruchu, zgrupowanych w elementarnych zbiorach po n źródeł, do aparatów obsługi zgrupowanych w zbiorach po m.q aparatów w przypadku dojścia od źródła ruchu do aparatów obsługi poprzez układ dwusekcyjny o m drogach w elementarnym zbiorze.

5.2. Zasadnicze wzory dla układu dwusekcyjnego z ekspansją w pierwszej sekcji komutacji

Układy z ekspansją w pierwszej sekcji komutacji to układy, w których w elementarnym zbiorze źródeł ruchu występuje n źródeł, a w elementarnym zbiorze dróg pośrednich występuje m dróg i spełniona jest własność $n \leqslant m$. Dla omawianego przypadku można przeprowadzić następujące obliczenia:

$$E_L = \sum_{p=m-n}^{m} E_m/A/ \, \frac{m!}{A^m} \, \frac{A^p}{p!} \, \frac{C_n^{m-p}}{C_m^{m-p}} \cdot a^{m-p} =$$

$$= E_m/A/ \cdot \sum_{p=m-n}^{m} \frac{A^{p-m}}{a^{p-n}} \, \frac{n!}{/n-m+p/!} =$$

$$= \frac{E_m/A/}{\left(\frac{A}{a}\right)^n \frac{1}{n!}} \cdot \sum_{x=o}^{n} \left(\frac{A}{a}\right)^x \cdot \frac{1}{x!} = \frac{E_m/A/}{E_n\left(\frac{A}{a}\right)}$$

Otrzymany wzór ma analogiczną postać do wzoru wyprowadzonego poprzednio i jest on wykorzystywany dla przypadku n=m oraz dla przypadku $n < m$.

W podobny sposób wyprowadza się dalsze wzory. W szczególności dla przypadku, gdy aparaty obsługi zgrupowane są w zbiorach po m.q, otrzymujemy to co poprzednio, to znaczy:

$$E_L = \frac{E_{mq}/A/}{E_{nq}\left(\frac{A}{a}\right)}$$

oraz dla przypadku rozkładu Bernoulliego w obu sekcjach komutacji:

$$E_L = c^{q/m-n/} /a + c^q - ac^q/^n$$

gdzie c wyraża średnie wykorzystanie aparatu obsługi:

$$c = \frac{A}{m.q}$$

Rozpatrzmy z kolei układ, który zgodnie z bezpośrednim tłumaczeniem określenia użytkowego przez Jacobaeusa nazywane są układami niezupełnymi oraz określeniem użytym przez naukowców radzieckich - "wzbogaconymi". Taki układ wzbogacony cechuje się tym, że drogi pośrednie stanowią m podzbiorów po f dróg pośrednich w każdym i w pierwszym przypadku mf dróg pośrednich umożliwia dojście do m aparatów obsługi. W ten sposób do każdego spośród m aparatów obsługi mamy od n źródeł "rozszerzony" dostęp przez f dróg. Układ wzbogacony jest wtedy układem z ekspansją w pierwszej sekcji komutacji, gdy $n \leq m.f$. Do poprzednio wyprowadzonego wzoru zamiast wartości b można wprowadzić wartość b^f i otrzymuje się w ogólnym przypadku:

$$E_L = \frac{E_{mq}/A/}{E_{m.q}\left(\frac{A}{b^f}\right)}$$

Zwróćmy jeszcze uwagę, jaką rolę odgrywa współczynnik ekspansji $\sigma = \frac{m}{n}$. Podstawowy wzór, jak już podawaliśmy, ma postać

$$E_L = \beta_e \cdot E_{mq} \quad /A/$$

gdzie:

$$\beta_e = \frac{1}{E_n\left(\frac{A}{a}\right)}$$

Jeżeli obliczymy wartości β_e dla m=20 i różnych wartości n: 15, 13 i 10, to między tymi wartościami β_e otrzymamy zależności podane w poniższej tabelce:

$\frac{A}{a}$	13	15	20	25	30	35	40	50	60
k_1	0,600	0,685	0,806	0,860	0,895	0,915	0,930	0,950	0,960
k_2	0,100	0,175	0,387	0,545	0,647	0,713	0,630	0,624	0,654

Współczynnik k_1 podaje stosunek między wartościami β_e dla n=13 i n=15, a k_2 dla n=10 i n=15. Jak widać z przytoczonych danych, natłok przy większym współczynniku ekspansji σ jest odpowiednio mniejszy.

5.3. Układ dwusekcyjny z kompresją w pierwszej sekcji komutacji

Kompresja w pierwszej sekcji komutacji oznacza, że liczba źródeł ruchu w elementarnym zbiorze n jest większa od liczby dróg pośrednich m; występuje ona w przypadkach, gdy źródła ruchu generują średnie niewielkie natężenie ruchu i sumaryczny ruch grup źródeł jest koncentrowany do mniejszej liczby aparatów obsługi w urządzeniu komutującym. Zwróćmy uwagę, że liczba źródeł ruchu przewyższa liczbę dróg, przez które mamy dostęp do aparatów obsługi i tak samo przewyższa liczbę aparatów obsługi. Natłok więc występuje wtedy, gdy choć nie wszystkie źródła ruchu są obsługiwane, nie występuje już możliwość dostępu od źródła ruchu do aparatów obsługi. W tej sytuacji mamy w zasadzie rozkład w pierwszej sekcji komutacji analogiczny do rozkładu Erlanga i biorąc pod uwagę, że taki sam rozkład występuje w drugiej sekcji komutacji musimy się liczyć w omawianym przypadku z rozkładem Erlanga w pierwszej, jak i drugiej sekcji. Takie założenia dają nieco bardziej złożone wzory, tym bardziej że dla uniknięcia nadmiernego natłoku w większości przypadków stosuje się tu układy wzbogacone. Dla takiego przypadku Jacobaeus przytacza wzór:

$$E_L = E_{mf}/A_o/ + \sum_{p=o}^{m} \frac{\frac{A^{mq-m+p}}{/mq-m+p/!} E_{mf}/A_o/}{\sum\limits_{i=o}^{mq} \frac{A^i}{i!} E_{pf}/A_o/}$$

który można przekształcić w następującą postać:

$$E_L = E_{mf}/A_o/ + \beta_k \cdot E_{mq}/A/$$

gdzie β_k jest współczynnikiem dla przypadku kompresji większym od jedności, A_o - średnie natężenie ruchu dróg pośrednich zgrupowanych w m podzbiorach po f dróg oraz A - średnie natężenie ruchu oferowanego zbiorowi m.q aparatów obsługi.

Dla zmniejszenia natłoku w omawianych układach stosuje się niejednokrotnie zwielokrotnienie z transpozycją /przemieszczeniem/. Ze względu na przejrzystość zwielokrotnienia i prostotę zestawienia połączeń najczęściej stosuje się tak zwane przemieszczenie prostokątne /rys. 9/. Dzięki przemieszczeniu źródła ruchu, w których występują niejednokrotnie duże wahania ruchu generowanego, mogą korzystać chwilowo z większej ilości dróg pośrednich.

Biorąc pod uwagę zastosowanie transpozycji omawiany wzór Jacobaeusa może być przedstawiony w postaci:

$$E_L = E_{mf}\left(\frac{A_o}{\eta}\right) + \beta_k \cdot E_{mq}/A/$$

gdzie: η jest współczynnikiem transpozycji.

Przyjmując przykładowo, że sumaryczny natłok E_L nie może przekraczać wartości $E_L = 0{,}005$ i biorąc pod uwagę, że wielkość β_k wynosi około 2, można natłok w omawianym układzie w zależności od liczby dróg pośrednich mf oraz liczby aparatów obsługi mq określać w przybliżeniu wg poniższych danych:

mf	4	5	6	7	8	10	12	14	16	20	24
A_o	0,44	0,76	1,15	1,58	2,05	3,09	4,23	5,45	6,72	9,41	12,24
$\frac{A_o}{\eta}$	0,77	1,2	1,8	2,4	3,1	4,3	5,7	7,2	8,7	11,8	14,9

mq	10	15	20	25	30	35	40	50
A	3,43	6,58	10,07	13,76	17,51	21,56	25,60	33,90

Uczeni radzieccy przeprowadzili szereg badań symulacyjnych wspomnianego wyżej wzoru Jacobaeusa i w metodyce określania wyposażenia central systemu crossbar [27] opracowanej przez Instytut Naukowo-Badawczy Łączności Telefonicznej NIITS podane zostało prawdopodobieństwo natłoku w układzie dwusekcyjnym z kompresją w pierwszej sekcji komutacji i z zastosowaniem wzbogacenia w zbiorach elementarnych dróg pośrednich w następującej postaci:

$$E_L = \gamma / E' + E'' /$$

gdzie:

$$E' = E_{mf}\left(\frac{A_o}{\eta}\right); \quad E'' = E_{mq} / A / ;$$

γ = współczynnik zależny od m i f oraz od stosunku $\frac{E'}{E''}$

Współczynnik transpozycji η wynosi dla podzbiorów o n źródłach ruchu:

n	10	20	50
η	1,6	1,45	1,3

Zarówno wzór Jacobaeusa jak i jego modyfikacja dokonana przez NIITS są najczęściej wykorzystywane przy określaniu natłoku w abonenckich stopniach komutacyjnych central systemu crossbar o układzie dwusekcyjnym w połączeniu między łączami abonenckimi i łączami wewnątrzcentralowymi. Stopień ten komutuje równocześnie /sekcja A jest wspólna/ ruch przychodzący do abonentów w układzie o niejednokrotnie większej liczbie sekcji niż dwie.

5.4. Układ dwusekcyjny przy cząstkowym zwielokrotnieniu wyjść

Dla uzyskania większych zbiorów aparatów obsługi /wyjść/ niż m lub m.q po przejściu przez układ dwusekcyjny stosuje się podobnie jak przy bezpośrednim dojściu od źródeł ruchu do aparatów obsługi rozwiązanie z cząstkowym zwielokrotnieniem wyjść. W rozważaniach Jacobaeusa podana została zależność

$$N = mq + \frac{A - A_o}{c}$$

dla określenia wielkości zbioru aparatów obsługi /wiązki wyjściowej/, gdzie: mq - dostępność; A - średnie natężenie ruchu oferowanego N aparatom obsługi; A_o - średnie natężenie ruchu oferowanego przy danym natłoku zbiorowi mq aparatów obsługi przy pełnej dostępności do tych aparatów; c - współczynnik zależny od struktury układu dwusekcyjnego i założonego współczynnika natłoku. Powyższy wzór jest analogiczny do wzoru do określania liczby aparatów obsługi w wiązce wyjściowej metodą O'Della dla cząstkowego zwielokrotnienia wyjść /mq=D; A_o i c odpowiadają A_D i a_s/.

Jacobaeus określa średnie natężenie ruchu A_o dla rozkładu Bernoulliego i Erlanga w układzie dwusekcyjnym według typowej zależności:

$$E_L = \frac{E_{mq}/A_o/}{E_{mq}\left(\frac{A_o}{a}\right)},$$

a jednocześnie wartość do określania natłoku przy rozkładzie Bernoulliego zależności:

$$E_L = c^{q/m-n/}\left[a + c^q /1-a/^{n} \right]$$

Nieco inne zależności podane są dla omawianego przypadku cząstkowego zwielokrotnienia wyjść w metodyce opracowanej przez NIITS. Wielkość mianowicie c podana powyżej we wzorze zalecanym przez Jacobaeusa w metodyce NIITS zaleca się obliczać według zależności:

$$c = a_s - \frac{A_D - A_o}{D}$$

Natomiast w metodyce NIITS występują te same zależności co u Jacobaeusa do określania wielkości A_o. W związku z tym, zastępując mq przez D, możemy napisać:

$$N = D + \frac{A - A_D + A_D - A_o}{a_s - \dfrac{A_D - A_o}{D}}$$

Oznaczmy teraz

$$\frac{A_D - A_o}{D} = d$$

i napiszmy z kolei

$$N = D + \frac{A - A_D + d.D}{a_s - d}$$

i dalej:

$$N = \frac{a_s.D + A - A_D}{a_s - d} = \left(D + \frac{A - A_D}{a_s} \right). \frac{a_s}{a_s - d}$$

Podstawiając wyrażenie do określenia liczby łączy według wzoru O'Della - N_s, możemy zatem otrzymać:

$$N = N_s \cdot \frac{a_s}{a_s - d}$$

Omawiana zależność podaje liczbę wyjściowych aparatów obsługi N za układem dwusekcyjnym, gdy przy bezpośrednim dostępie od źródeł ruchu do aparatów obsługi mielibyśmywedług O'Della N_s łączy. Współczynnik $\frac{a_s}{a_s-d}$ jest większy od jedności. Ze zrozumiałych względów liczba łączy za układem obarczonym cechą blokady wewnętrznej musi być większa niż w przypadku bezpośredniego dostępu do aparatów obsługi.

Rozpatrzmy z kolei inne przekształcenia wyżej podanego wzoru, a mianowicie: $N.a_s - Nd = a_s D + A - A_D$

$$A = A_D + a_s /N-D/ - N.d$$

Biorąc pod uwagę, że część tego wyrażenia jest wielkością średniego natężenia ruchu oferowanego N aparatom obsługi przy cząstkowym zwielokrotnieniu i bezpośredniej dostępności do aparatów obsługi określanym wg wzoru O'Della, można napisać:

$$A = A_s - d \cdot N$$

Wzór ten pozwala z kolei, opierając się na danych według wzoru O'Della natężeniu A_s przy założonych stratach, dostępności D i liczbie aparatów obsługi N, na określenie aktualnego średniego natężenia ruchu przy układzie dwusekcyjnym.

Przytoczmy tu tablice dla układów dwusekcyjnych, przy czym

Tablica 13

$\Lambda = f/N/$ dla układu dwusekcyjnego z ekspansją

N	5	10	15	20	25	30	40	50	75	100
			30x40x400		E_L=1%	D=20				
a = 0,5	1,30	4,20	7,35	10,65	13,95	17,10	23,50	29,90	45,85	61,80
0,6	1,25	4,00	7,00	10,20	13,40	16,50	22,65	28,85	44,25	59,70
0,7	1,20	3,80	6,55	9,60	12,75	15,75	21,65	27,60	42,40	57,20
0,8	1,00	3,40	5,80	8,75	11,85	14,60	20,15	25,75	39,65	53,55
			30x40x400		E_L=1%	D=40				
a = 0,5							27,20	34,95	54,15	73,40
0,6							26,70	34,30	53,20	72,10
0,7							26,00	33,45	51,90	70,40
0,8							25,15	32,40	50,35	68,30
			30x60x400		E_L=1%	D=20				
a = 0,5	1,35	4,35	7,70	11,25	14,65	17,95	24,65	31,30	48,00	64,70
0,6	1,35	4,30	7,60	11,05	14,40	17,70	24,25	30,85	47,25	63,70
0,7	1,30	4,20	7,45	10,80	14,15	17,35	23,85	30,30	46,50	62,70
0,8	1,30	4,15	7,25	10,55	13,85	17,05	23,40	19,80	45,70	61,65

Tablica 14

d oraz $\frac{a_s}{a_s - d}$ dla 30x40x400 i D=20

a \ E_L	1	3	5	10	20	30	40	50 %	
0,5	0,04	0,054	0,068	0,10	0,17	0,24	0,31	0,38	$d = f/a, E_L/$
0,6	0,05	0,066	0,082	0,12	0,20	0,28	0,36	0,44	
0,7	0,06	0,078	0,096	0,14	0,23	0,32	0,41	0,50	
0,8	0,07	0,092	0,114	0,17	0,28	0,39	0,50	0,51	
0,5	1,06	1,07	1,09	1,12	1,18	1,22	1,24	1,25	$\frac{a_s}{a_s - d}$
0,6	1,08	1,09	1,11	1,14	1,22	1,27	1,30	1,31	
0,7	1,09	1,11	1,13	1,18	1,26	1,32	1,35	1,36	
0,8	1,11	1,13	1,16	1,22	1,32	1,40	1,46	1,48	

weźmy jako przykład układ 30x40x400 i 30x60x400, to znaczy układy, w których zbiór wejściowy wynosi 30 źródeł ruchu, dróg pośrednich 40 lub 60, aparatów obsługi może być w sumie 400. Normalnie najczęściej stosowany zbiór podstawowy aparatów obsługi jest równy 20 i dla tej wielkości 20 stanowiącej również wielkość dostępności przy cząstkowym zwielokrotnieniu oraz dla podwójnej wielkości 2x20=40 podaje tabl. 13.

Dla podanego tutaj układu 30x40x400 i dostępności D=20 w tym układzie podajemy również opisane wyżej dane liczbowe o parametrach d oraz $\frac{a_s}{a_s-d}$ dla różnych współczynników natłoku /tabl.14/.

5.5. Niektóre inne koncepcje określania natłoku w układach wielosekcyjnych

Bezpośrednim kontynuatorem pracy Jacobaeusa jest uczony szwedzki Elldin [14], którego publikacja ujmująca opracowanie zasad obliczania liczby organów w układach wielosekcyjnych /ostatnie wydanie 1969 r./ stanowi istotną podstawę do działania w tej dziedzinie.

Wspomnijmy też, że kroki podjęte przez administracje łączności i organizacje przemysłowe krajów socjalistycznych w dziedzinie central systemu crossbar doprowadziły do weryfikacji i uściślenia metod obliczeniowych. Najważniejsze opracowanie stanowi tu zestawienie najbardziej miarodajnych wzorów przez radziecki instytut NIITS. Nie można też pominąć milczeniem jednej z ciekawszych metod /opublikowanej w 1959 r/, niezależnie w NRF i ZSRR [22], wyznaczania efektywnej dostępności. Założenia tej metody przewidują rozpatrywanie układu wielosekcyjnego jako układu o ograniczonej dostępności, to znaczy analogicznie do układu o cząstkowym zwielokrotnieniu wyjść. Efektywna dostępność, o której tu mowa, jest odpowiednio mniejsza od dostępności do wyjściowego zbioru aparatów obsługi i jest zależna od budowy danego układu wielosekcyjnego oraz od obciążenia ruchowego dróg pośrednich.

W najprostszym przypadku układu dwusekcyjnego z ekspansją można praktycznie przyjmować, że $D_e = mq/1-b/$, gdzie: b - jest średnim obciążeniem drogi pośredniej. Zależność podana tutaj tłumaczy się w naturalny sposób, jeżeli weźmiemy pod uwagę, że największe prawdopodobieństwo wzięcia do pracy x aparatów obsługi występuje dla x = A /średniego natężenia wyrażonego w erlangach/. Wielkość b jest właściwie średnim natężeniem odniesionym do jednej drogi pośredniej. W związku z tym najbardziej prawdopodobne jest, że w momencie pojawienia się zgłoszenia w zbiorze m.q dróg pośrednich swobodnych jest tylko m.q /1-b/ dróg pośrednich. Nieco bardziej skomplikowane rozwiązanie występuje dla przypadku układów z kompresją /m < n/ i tu drogą szeregu symulacyjnych obliczeń otrzymano przybliżony współczynnik korekcji. Dla tych układów można stosować wzór $D_d = 0{,}7\ m.q\ /1-b/$. Metoda efektywnej dostępności w szerokim zakresie została zastosowana w pracach A. Lotzego [16] który opracował sposób przybliżonego oceniania natłoku w układach o dowolnej liczbie sekcji komutacji i przy dowolnych zwielokrotnieniach wyjść.

Szereg wyżej przytoczonych wzorów jest /jak podano/ wzorami przybliżonymi i choć sprawdzone w praktyce, dają one dla najczęściej spotykanych przypadków wartość zgodną z rzeczywistością, nie dają jednak możliwości uzyskania prawidłowych wyników w pewnych przypadkach krańcowych lub wtedy, gdy trzeba operować bardzo złożonymi wzorami. Dlatego też, wykorzystując coraz częściej możliwości komputerów, przebiegi w układach komutacji określa się za pomocą modelowania ruchu telefonicznego.

5.6. Układy wielosekcyjne bez blokady wewnętrznej

Omawiane układy bez blokady wewnętrznej to takie układy, w których jedynym warunkiem możliwości osiągnięcia aparatu obsługi za omawianym układem wielosekcyjnym jest swoboda tego aparatu. Rozpocznijmy rozważania od układu trzysekcyjnego, w którym w ogólnej postaci mamy N dróg przyjściowych /źródeł ruchu/ oraz M dróg wyjściowych /aparatów obsługi/.

Zgodnie z zasadą układu wielosekcyjnego dzieli się N źródeł ruchu na zbiory po n źródeł, a aparaty obsługi na zbiory po m aparatów. Z danego zbioru n źródeł przechodzimy na x pierwszych dróg pośrednich. Z każdej drogi pośredniej zbioru x przechodzimy na jedną drogę pośrednią zbioru x drugich dróg pośrednich i z tych drugich dróg pośrednich mamy dostęp do m aparatów obsługi.

Liczba zbiorów po x pierwszych dróg pośrednich $/\frac{N}{n}/$ jest równa liczbie zbiorów po n dróg przyjściowych. Liczba zbiorów po x drugich dróg pośrednich $/\frac{M}{m}/$ jest równa liczbie zbiorów po m aparatów obsługi.

Decydującą dla możliwości przejścia przez układ komutacyjny jest swoboda pierwszej drogi pośredniej i odpowiadającej mu drugiej drogi pośredniej. Jeżeli w jakimś zbiorze n źródeł zostanie swobodne tylko jedno źródło i z tego właśnie źródła jest podawane pojawiające się zgłoszenie, to fakt obsługiwania n-1 zgłoszeń wiąże się z wzięciem do pracy n-1 spośród x pierwszych dróg pośrednich. Jeżeli z kolei w żądanym zbiorze m aparatów obsługi wziętych jest już do pracy m-1 aparatów obsługi, a swobodny jest tylko jeden, do którego może zostać skierowane zgłoszenie od rozpatrywanego źródła ruchu, to biorąc najbardziej niekorzystny przypadek w zbiorze dróg pośrednich wzięte są do pracy m-1 dróg innych niż odpowiadających n-1 pierwszym drogom pośrednim. Tak więc można powiedzieć, że zarówno w pierwszym zbiorze dróg pośrednich jak i w drugim zbiorze dróg pośrednich nie można aktualnie korzystać z /n-1/ + /m-1/ dróg. W celu zapewnienia obsługi omawianego ostatniego źródła w określonym zbiorze n przez ostatni wolny aparat obsługi w określonym zbiorze m konieczne jest, aby zarówno w odpowiednim zbiorze pierwszych dróg pośrednich i odpowiednim zbiorze drugich dróg pośrednich była wolna jedna i ta sama droga. Oznacza to, że każdy zbiór x pierwszych dróg pośrednich i każdy zbiór x drugich dróg pośrednich musi składać się co najmniej z n+m-1 dróg /rys. 11/.

Przeprowadźmy pewne dodatkowe rozważania nad układami bezblokadowymi w założeniu zrealizowania komutacji między źródłami ruchu, łączami pośrednimi pierwszymi i drugimi oraz aparatami obsługi za pomocą pojedynczych elementarnych układów komutujących. Przy zastosowaniu takich układów w celu uzyskania dostępu od n źródeł do x dróg trzeba zastosować n.x elementarnych układów komutujących. I analogicznie w innych przypadkach komutowania. Liczbę elementarnych układów komutujących w przypadku omawianego układu można zapisać następująco:

$$K = n \cdot x \cdot \frac{N}{n} + x \cdot \frac{N}{n} \cdot \frac{M}{m} + m \cdot x \cdot \frac{M}{m} =$$

$$= x \cdot / N + M + \frac{N}{n} \cdot \frac{M}{n} /$$

Biorąc pod uwagę, że $x = n + m - 1$, można określić wielkość $n=m$, przy których w omawianym układzie trzysekcyjnym występuje najmniejsza liczba elementarnych układów komutujących. Po odpowiednim obliczeniu otrzymujemy

$$n \leqslant \sqrt{\frac{N \cdot M}{N + M}}$$

oraz

$$K_{min} = 4 \sqrt{N.M /N+M/}$$

Gdyby nie był stosowany układ trzysekcyjny, a układ o bezpośrednim dostępie od N źródeł do M aparatów obsługi z zachowaniem warunku braku blokady, liczba elementarnych układów komutujących wyniosłaby N.M. Można więc napisać:

$$\frac{K_{min}}{N.M} = 4 \sqrt{\frac{N + M}{N \cdot M}}$$

i warto podkreślić, że układ trzysekcyjny będzie zbudowany z mniejszej liczby elementarnych układów komutujących, gdy:

$$\frac{N \cdot M}{N + M} \geqslant 16$$

Przy większej liczbie źródeł ruchu N i przy większej liczbie aparatów obsługi M może być korzystniejsze przejście od układu trzysekcyjnego do układu pięciosekcyjnego. W takim układzie pięciosekcyjnym zgłoszenia od źródeł ruchu kierowane są na pierwsze drogi pośrednie, z pierwszych dróg pośrednich na drugie drogi pośrednie, z drugich dróg pośrednich na trzecie drogi pośrednie i z trzecich dróg pośrednich na czwarte drogi pośrednie oraz z tych ostatnich na aparaty obsługi.

Jeżeli układ komutacyjny złożony z pierwszych, drugich, trzecich i czwartych dróg pośrednich potraktujemy jako "umieszczony w środku" układ trzysekcyjny, który ma z jednej strony "zewnętrzne" połączenie ze źródłami ruchu, a z drugiej "zewnętrzne" połączenie z aparatem obsługi, to można najpierw ten układ trzysekcyjny rozwiązać, wykorzystując zasadę zastosowania minimalnej liczby układów komutujących. Również w założeniu uzyskania najmniejszej liczby elementarnych układów komutujących można określić podział źródeł ruchu i aparatów obsługi na zbiory po n sztuk i wtedy w warunkach optimum możemy dla układu pięciosekcyjnego otrzymać:

$$n \leq \sqrt[3]{4 \cdot \frac{N \cdot M}{N + M}} \quad \text{oraz}$$

$$K_{min} = 6 \sqrt[3]{4 N M / N + M /^{2}}$$

Jednocześnie otrzymujemy, że wielkość pojedynczego zbioru pierwszych dróg pośrednich jest równa wielkości takiego zbioru czwartych dróg pośrednich i wynosi $p = \frac{n}{2}$.

Stosunek

$$\frac{K_{min\ 5}}{K_{min\ 3}} = 1,5 \frac{\sqrt[3]{4 NM / N+M /^{2}}}{\sqrt{NM \cdot / N+M /}}$$

Łatwo obliczyć, że dla

$$\frac{N \cdot M}{N + M} \geqslant 40$$

układ pięciosekcyjny jest korzystniejszy od układu trzysekcyjnego i układu o bezpośrednim dostępie od źródeł ruchu do aparatów obsługi.

Wspomnijmy jeszcze o układzie siedmiosekcyjnym, który zrealizowany według podobnej zasady i przy określaniu w podobny sposób optymalnych rozwiązań ma następujące parametry: liczba źródeł ruchu lub aparatów obsługi w zbiorze

$$n \leqslant \sqrt[4]{32 \frac{N \cdot M}{N + M}}$$

Liczba dróg pośrednich pierwszych i ostatnich w zbiorze: $p = \frac{n}{2}$, a liczba dróg drugich i przedostatnich w zbiorze: $d = \frac{n}{4}$. Przy takich elementarnych optymalnych zbiorach źródeł ruchu, aparatów obsługi i dróg pośrednich otrzymujemy:

$$K_{min} = 16 \cdot \sqrt[4]{2\,NM\,/N+M/^{3}}$$

Postępując analogicznie otrzymujemy:

$$\frac{K_{min,7}}{K_{min,5}} = \frac{16 \cdot \sqrt[4]{2\,NM\,/N+M/^{3}}}{6\sqrt[3]{4\,NM\,/N+M/^{2}}}$$

Układ siedmiosekcyjny jest korzystniejszy od pozostałych innych układów, gdy

$$\frac{N.M}{N+M} \geqslant 4000.$$

Podkreślmy, że omawiane układy bez blokady wewnętrznej zarówno dla przypadku bezpośredniego dojścia od źródeł ruchu do aparatów obsługi jak i w przypadku dojścia przez układy 3-, 5- lub 7-sekcyjne są szczególnie interesujące w stosowanych coraz częściej obecnie układach komutujących z rozdziałem czasowym. W tych układach w poszczególnych szczelinach czasowych tworzone są połączenia między kanałami czasowymi różnych traktów systemów wielokrotnych o impulsowo-kodowej modulacji. Dla uniknięcia trudności i ograniczeń w komutowaniu poszczególnych kanałów najwygodniejsze jest stosowanie układów komutujących bez blokady wewnętrznej, gdyż takie układy zapewniają, zgodnie z założeniem ich budowy, bezwarunkowe możliwości komutowania każdego źródła ruchu z każdym swobodnym aparatem obsługi.

6. KIEROWANIE RUCHU DROGAMI ALTERNATYWNYMI

6.1. Wprowadzenie

W najprostszym przypadku trójkąta central ABC problem sprowadza się do kierowania ruchu A-C częściowo przez drogi bezpośrednie A-C, a częściowo razem z ruchem A-B i dalej tranzytem przez centralę B, a następnie - razem z ruchem B-C. Krańcowym przypadkiem są bądź przypadek kierowania całości ruchu A-C przez odpowiednie bezpośrednie wiązki A-C bądź też kierowanie całego ruchu A-C, łącznie z innym ruchem, tranzytem poprzez centralę B. Tak więc w krańcowych przypadkach mamy bądź tylko połączenie bezpośrednie bądź tylko połączenie tranzytowe. Przypadek natomiast kierowania ruchu drogami alternatywnymi jest przypadkiem, w którym występuje kierowanie w pierwszej kolejności ruchu przez drogę bezpośrednią, która obliczona jest oszczędnie i pracuje przy zwiększonych stratach. Ruch jednak, który nie zostaje załatwiony przez te drogi bezpośrednie zostaje jako tak zwany ruch przelewowy dołączony do strumienia ruchu w innej drodze biegnącej tranzytem przez dodatkowe centrale. Wprowadzenie ruchu przelewowego dodatkowo do innego ruchu międzycentralowego zmusza, w celu utrzymania dopuszczalnych strat, do zwiększenia liczby dróg zarówno między centralą wyjściową i centralą tranzytową, jak i między centralą tranzytową i centralą przyjściową. W dalszym rozważaniu zagadnienie sprowadza się do rozwiązania problemu ekonomicznego, biorąc bowiem pod uwagę koszt dróg w połączeniach międzycentralowych oraz wyposażenie stacyjne związane z tymi drogami, jak również dodatkowe wyposażenie do komutacji połączeń w przypadku tranzytowania, można stwierdzić, że łącze, licząc od centrali wyjściowej do centrali przyjściowej, przez które biegnie ruch tranzytowy, jest droższe od łącza bezpośredniego.

Koszt połączenia bezpośredniego między dwoma centralami komutacyjnymi może być określony jako:

$$K_o = k\frac{A}{a_o} = kA\frac{1}{a_o}$$

gdzie:

K_o - całkowity koszt połączenia bezpośredniego,

k - koszt jednego łącza w połączeniu bezpośrednim,

A - średnie natężenie ruchu oferowanego między tymi centralami,

a_o - średnie wykorzystanie łącza w przypadku połączenia bezpośredniego.

Dla połączenia tranzytowego poprzez jedną centralę tranzytową koszt połączenia może być zapisany następująco:

$$K_t = \alpha_1 \cdot k \cdot \frac{A}{a_1} + \alpha_2 \cdot k \frac{A}{a_2} = k \cdot A \left/ \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} \right/$$

gdzie:

K_t - całkowity koszt połączenia tranzytowego,

α_1, α_2 - stosunek kosztu łącza odpowiednio na pierwszym i drugim odcinku drogi tranzytowej do kosztu drogi bezpośredniej,

a_1, a_2 - średnie wykorzystanie łącza odpowiednio na odcinku pierwszym i drugim drogi tranzytowej.

Z tych dwóch zależności można łatwo określić, kiedy bardziej jest opłacalne kierowanie całkowitego ruchu drogą tranzytową, a kiedy drogą bezpośrednią. Napiszmy mianowicie:

$$\frac{K_t}{K_o} = \left(\frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} \right) \cdot a_o$$

przy czym można stwierdzić, że połączenie tranzytowe będzie tańsze, gdy powyższy stosunek jest mniejszy od jedności, tzn. gdy występuje nierówność

$$\frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} < \frac{1}{a_o}$$

Przejdziemy z kolei do sformułowania zależności kosztu dla połączenia z częściowym przelewem ruchu. Oznaczmy z kolei liczbę łączy w drodze bezpośredniej przez N, a wielkość ruchu przelewowego - A_p. Wykorzystując znane już inne oznaczenie, możemy zapisać koszt połączenia K_p w sposób następujący:

$$K_p = k \cdot N + \alpha_1 k \cdot \frac{A_p}{a_1} + \alpha_2 k \cdot \frac{A_p}{a_2} =$$

$$= k \cdot N + k \cdot A_p \left[\frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} \right]$$

Z kolei możemy napisać następujący stosunek kosztów:

$$\frac{K_p}{K_o} = \frac{N a_o}{A} + \frac{A_p a_o}{A} \left[\frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} \right] =$$

$$= \frac{a_o}{A} \left[N + A_p \left(\frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} \right) \right]$$

Funkcja $N + A_p \left(\frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} \right)$ ma minimum [5] dla przypadku, w którym zachodzi zależność:

$$\frac{1}{a_{N+1}} = \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} ,$$

gdzie a_{N+1} jest średnim obciążeniem /N+1/-ej drogi w połączeniu bezpośrednim. Szukając zależności, kiedy połączenie z częściowym przelewem ruchu jest korzystniejsze od połączenia bezpośredniego, możemy z kolei napisać:

$$A \cdot \frac{1}{a_o} > N + A_p \frac{1}{a_{N+1}}$$

dla przypadku optymalnego.

W tej sytuacji połączenie z częściowym przelewem ruchu jest bardziej opłacalne od połączenia z całkowitym tranzytowaniem ruchu /dla przypadku minimalnego kosztu połączenia z częściowym przelewem ruchu/, przy następującej zależności:

$$N < \frac{A - A_p}{a_{N+1}}$$

$A - A_p = A_z$ jest natężeniem ruchu załatwianego przez drogi pierwszego wyboru i wtedy:

$$N < \frac{A_z}{a_{N+1}}$$

Zależność ta jest warunkiem, który musi być spełniony, aby połączenie z przelewem ruchu było korzystniejsze niż obsłużenie całości ruchu drogą tranzytową.

Jeżeli do porównania kosztów połączenia z częściowym przelewem ruchu i połączenia bezpośredniego wprowadzi się wielkość A_z, to otrzymamy po przekształceniu nierówność

$$N < \frac{A_z}{a_{N+1}} - A \cdot \left(\frac{1}{a_{N+1}} - \frac{1}{a_o} \right),$$

której spełnienie jest warunkiem, żeby połączenie z częściowym przelewem ruchu było korzystniejsze niż obsłużenie całości ruchu przez drogi bezpośrednie.

6.2. Metody obliczeniowe szwedzkiego i amerykańskiego zarządu łączności

Od 1951 roku w Szwecji jest stosowana metoda obliczeniowa [19], dla której wyjściową jest sieć dróg ostatniego wyboru. Przed przystąpieniem do ustalenia szczegółowej konfiguracji sieci w projekcie występują tylko opłacalne lub obowiązkowe drogi bezpośrednie oraz drogi tranzytowe. W przypadkach, kiedy można liczyć na to, że połączenie z częściowym przelewem ruchu byłoby opłacalne, wtedy takim połączeniem zastępuje się połączenie, w którym wstępnie przewidziane było kierowanie całego ruchu tylko drogą tranzytową. Oznacza to rozważanie nad celowością wprowadzania bezpośrednich dróg połączeniowych tam, gdzie początkowo ich nie przewidywano. Podstawowym założeniem tej metody jest przewidzenie najpierw jednego łącza w drodze bezpośredniej, co wiąże się z częściowym załatwieniem ruchu przez to jedno łącze. W wyniku zmniejszenia ruchu tranzytowego może ulec zmniejszeniu liczba łączy w drodze tranzytowej. Jeżeli koszt połączenia tranzytowego po wykorzystaniu zmniejszenia liczby łączy z racji odciążenia tej relacji przez pierwsze łącze bezpośrednie zostanie zmniejszony więcej niż wynosi koszt połączenia bezpośredniego, to autorzy metody wyciągają wniosek, że należy dokonać próby dalszego zwiększania liczb łączy w drodze bezpośredniej. W toku dalszych podobnych manipulacji dochodzi się do momentu, w którym zmniejszenie kosztu w drodze tranzytowej jest mniejsze niż koszt łącza w drodze bezpośredniej. Oznacza to, że w drodze bezpośredniej powinno być o jedno łącze mniej.

W stosowanej praktycznie w Szwecji metodzie przybliżonej dochodzi się do następujących nierówności:

$$\frac{1}{a_N} < \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2}$$

oraz

$$\frac{1}{a_{N+1}} \geqslant \frac{\alpha_1}{a_1'} + \frac{\alpha_2}{a_2'}$$

gdzie:

a_N, a_{N+1}, α_1 i α_2 - oznaczenia jak w 6.1,

a_1 i a_2 - obciążenie ruchowe ostatnich "zabieranych" łączy z odcinków drogi tranzytowej po wprowadzeniu N łączy w drodze bezpośredniej

a_1' i a_2' - to samo dla N+1 łączy w drodze bezpośredniej.

Metoda stosowana przez amerykański zarząd łączności [18] nazywana jest metodą zastępczego ruchu przypadkowego. W tej metodzie wykorzystuje się dwa parametry charakteryzujące ruch telefoniczny: jego natężenie oraz wariancję tego ruchu. Przy zaoferowaniu kilku strumieni ruchu jednemu zbiorowi aparatów obsługi sumuje się natężenie oraz wariancję i otrzymuje się ruch o pewnej konkretnej wartości natężenia i konkretnej wartości wariancji. Jeżeli sumowaniu podlegałyby strumienie o charakterze ruchu przypadkowego, wtedy otrzymamy w sumie średnie natężenie i wariancje odpowiadające ruchowi przypadkowemu. Jeżeli natomiast choć jeden ze strumieni sumowanego ruchu nie ma w pełni charakteru przypadkowego, wtedy wariancja sumarycznego ruchu jest większa.

Przy wykorzystaniu odpowiednich wykresów czy tablic dla ruchu określonego tymi dwoma parametrami można określić, przy założonych stratach, odpowiednią liczbę aparatów obsługi /łączy/. W dalszych pracach [20] prowadzonych w Niemczech zamiast wariancji zaproponowano zastosowanie rozsiewności. /Zarówno o wariancji jak i rozsiewności wspomniano wyżej w rozdz. 2.5 i podano ich szczegółowe wzory/.

Obliczenia, o których mowa, mogą być wykonywane za pomocą załączonych do niniejszego opracowania tablic.

6.3. Określenie liczby łączy w przypadku połączeń z częściowym przelewem ruchu

Praktyczne określenie liczby łączy w drogach bezpośrednich oraz ruchu przelewowego w drogach tranzytowych może się odbywać za pomocą odpowiednich tablic, przy czym jako podstawa do opracowania tych tablic mogą być wykorzystane wyżej podane zależności minimalnego kosztu połączenia z częściowym przelewem ruchu. Jeżeli nie korzysta się z tablic, za pomocą których można określić występującą przy ruchu przelewowym rozsiewność i w związku z tym nie można określić liczby łączy, jaka dokładnie jest potrzebna dla ruchu przelewowego w drogach tranzytowych, to można przyjmować zamiast ruchu przelewowego zastępczy ruch przypadkowy przeciętnie większy o 20%. /tabl. 15/.

Dodajmy tu jeszcze jedną praktyczną uwagę. Najczęściej ruch przelewowy jest niewielką częścią ruchu oferowanego, gdyż większość ruchu skierowana zostaje na drogi pierwszego wyboru /często wielkość $A_p = 0,1 \div 0,2\ A$/, w związku z tym przy obliczaniu

Tablica 15

Rozkład strumieni ruchu przy drogach alternatywnych
/w erlangach/
D=N

a = 0,6 a = 0,7 a = 0,8	α = 1,00 α = 1,14		α = 1,03 α = 1,20 α = 1,37		α = 1,37 α = 1,60 α = 1,83		α = 1,72 α = 2,00 α = 2,29		α = 2,57 α = 3,00 α = 3,43		α = 3,43 α = 4,00 α = 4,57	
A	N	A_p	N	A_p	N	A_p	N	A_p	N	A_p	N	A_p
1					1	0,50	1	0,50	2	0,20	2	0,20
2			1	1,33	2	0,80	3	0,42	3	0,42	4	0,19
3	1	2,25	2	1,59	3	1,04	4	0,62	5	0,33	5	0,33
4	2	2,46	3	1,80	5	0,80	5	0,80	6	0,47	7	0,25
5	3	2,65	4	1,99	6	0,96	7	0,60	8	0,35	8	0,35
6	4	2,82	5	2,16	7	1,11	8	0,73	9	0,45	10	0,26
7	5	2,97	6	2,32	8	1,25	9	0,85	10	0,55	11	0,33
8	6	3,12	7	2,47	9	1,39	10	0,97	12	0,41	12	0,41
9	7	3,25	9	2,02	10	1,51	11	1,09	13	0,49	14	0,30
10	8	3,38	10	2,15	11	1,63	13	0,84	14	0,57	15	0,36
12	10	3,62	12	2,38	14	1,41	15	1,03	17	0,49	17	0,49
14	11	4,54	14	2,60	16	1,60	17	1,21	19	0,62	20	0,42
16	13	4,74	16	2,80	18	1,79	19	1,38	21	0,75	22	0,53
18	15	4,93	18	3,00	20	1,97	22	1,18	24	0,63	25	0,45
20	17	5,11	20	3,18	22	2,13	24	1,32	26	0,74	27	0,54
25	22	5,53	25	3,60	28	2,07	30	1,32	32	0,77	33	0,57
30	27	5,91	30	3,97	33	2,41	35	1,61	37	1,01	39	0,58

c.d. tabl. 15

D = N

a = 0,6 a = 0,7 a = 0,8	α = 1,00 α = 1,14		α = 1,03 α = 1,20 α = 1,37		α = 1,37 α = 1,60 α = 1,83		α = 1,72 α = 2,00 α = 2,29		α = 2,57 α = 3,00 α = 3,43		α = 3,43 α = 4,00 α = 4,57	
A	N	A_p	N	A_p	N	A_p	N	A_p	N	A_p	N	A_p
35	32	6,25	35	4,32	39	2,29	40	1,90	43	0,99	45	0,59
40	37	6,58	40	4,65	44	2,58	46	1,80	49	0,95	50	0,75
50	46	7,86	50	5,24	54	3,12	57	1,93	60	1,08	62	0,70

D = 20

a = 0,6 a = 0,7 a = 0,8	α = 1,00 α = 1,14		α = 1,03 α = 1,20 α = 1,37		α = 1,37 α = 1,60 α = 1,83		α = 1,71 α = 2,00 α = 2,29		α = 2,57 α = 3,00 α = 3,43		α = 3,43 α = 5,00 α = 5,71	
A	N	A_p	N	A_p	N	A_p	N	A_p	N	A_p	N	A_p
15	12	4,64	15	2,70	17	1,70	18	1,29	20	0,68	21	0,33
17	14	4,84	17	2,90	19	1,88	20	1,46	22	0,85	23	0,62
19	16	5,03	19	3,09	21	2,08	23	1,31	25	0,77	26	0,57
21	18	5,20	20	3,87	23	2,30	25	1,51	27	0,93	29	0,53
23	20	5,37	22	4,10	25	2,52	27	1,71	30	0,86	31	0,66
25	21	6,28	24	4,34	28	2,31	29	1,92	32	1,01	34	0,62
30	25	7,55	29	4,93	33	2,86	35	2,07	38	1,17	40	0,76
35	30	8,11	34	5,52	39	2,98	41	2,21	44	1,33	46	0,90
40	34	9,38	39	6,12	44	3,53	47	2,36	50	1,48	53	0,87
50	44	10,5	49	7,31	55	4,20	58	3,00	63	1,55	65	1,14

zakłada się niewielkie strumienie ruchu przelewowego, które sumuje się w jedną drogę tranzytową. Jeżeli ruch oferowany w jakimś kierunku wzrasta, to wtedy i ruch przelewowy zwiększy istotnie swoją wartość niemal o całkowity przyrost ruchu oferowanego. Taki przyrost może w istotny sposób zablokować drogę tranzytową. Biorąc takie zjawisko pod uwagę, zaleca się nie wprowadzenie ruchu przelewowego na te same drogi, przez które jednocześnie byłby kierowany ruch od centrali wyjściowej A do centrali B, będącej w innym przypadku centralą tranzytującą. Wzrosty bowiem ruchu przelewowego mogłyby w istotny sposób zablokować możliwość załatwienia ruchu, dla którego omawiana wiązka jest wiązką jedyną. Okazuje się znacznie korzystniejsze stworzenie dodatkowej wiązki, która by była przewidziana tylko jako droga dla szeregu ruchów przelewowych i nawet służyć może ona dla "przelewania" części ruchu z drogi bezpośredniej między centralą wyjściową A i centralą B. W takiej sytuacji przez jeden lub kilka wzrastających chwilowo strumieni ruchu mogłaby być zablokowana jedynie taka specjalna wiązka przelewowa. Nie grozi to więc dalszemu zmniejszeniu przepustowości ruchu do tego zakresu, jaki warunkują drogi pierwszego wyboru.

7. UWAGI KOŃCOWE

W okresie ostatnich około sześćdziesięciu lat zostało opracowanych wiele metod matematycznych dla określania zależności występujących w dziedzinie ruchu. Jednocześnie również rozwinięto możliwość mierzenia ruchu z jednej strony i tworzenia sztucznych przebiegów o znacznie krótszym czasie trwania, za pomocą których można by modelować przebiegi ruchowe. W tej ostatniej dziedzinie, po erze wykorzystywania specjalnych tzw. maszyn trafikowych preferuje się ostatnio wykorzystanie typowych komputerów. Za pomocą odpowiedniego programu, można zmodelować zarówno strumień zgłoszeń, jak i jego obsługę.

Mierzenie ruchu telefonicznego rzeczywistego wykonywane różnymi nowoczesnymi metodami i zgodnie z zaleceniami CCITT umożliwia określanie w rzeczywistych przypadkach chwilowych wartości natężenia ruchu, średniego natężenia ruchu w okresie obserwacji, wielkości natłoku, czasu oczekiwania itp. Metody te pozwalają oczywiście na wykrycie niezgodności między zaprojektowanymi systemami obsługi i rzeczywistą ich pracą w celu wykorzystania do określenia kierunku rozbudowy odpowiednich urządzeń komutacyjnych oraz dróg połączeniowych między nimi.

Obecnie do określania średniego natężenia ruchu używa się najczęściej bądź metody z odczytem prądu zależnego od liczby wziętych do pracy aparatów obsługi /organów połączeniowych/, bądź też napięcia również uzależnionego od liczby zajętych pracą aparatów obsługi. W szeregu rozwiązań zaleca się również metody, w których ze względu na większą dokładność odczytuje się, do dalszej obróbki, napięcie zależne od liczby swobodnych aparatów obsługi. W masowych pomiarach średniego natężenia ruchu pomiary wyrywkowe obciążenia różnych zbiorów aparatów obsługi mogą być bądź bezpośrednio sumowane w urządzeniu pomiarowym i podawane następnie tak, aby można było wyliczyć średnie natężenie ruchu w czasie obserwacji, bądź też mogą być zapisane w postaci wartości chwilowych w pamięci urządzenia mierzącego po to, aby poddać je następnie odpowiedniej obróbce za pomocą maszyny cyfrowej.

Coraz częściej mówi się obecnie o tym, że dane o chwilowych wartościach natężenia ruchu w różnych drogach połączeniowych sieci telekomunikacyjnej mogą być wykorzystywane do automatycznego korygowania kierowania ruchu w tej sieci. Opracowywane na bieżąco przez odpowiednie maszyny cyfrowe, mogłyby one wpływać na korzystniejsze kierowanie pewnych strumieni zgłoszeń zarówno w warunkach normalnych, jak i w pewnych przypadkach awaryjnych.

Metody symulacyjne umożliwiają jeszcze w okresie projektowania uzyskanie spojrzenia na właściwość rozwiązania układu komutującego i na właściwy ilościowy dobór dróg w sieci telekomunikacyjnej i organów w poszczególnych drogach. Metody symulacyjne mogą być też wykorzystywane dla dokładnych obliczeń zależności między średnim natężeniem ruchu oferowanego, liczbą aparatów obsługi, stratami i oczekiwaniem w tych przypadkach, gdzie dotychczas metody matematyczne umożliwiały operowanie za pomocą przebiegów przybliżonych i uproszczonych. Maszyny matematyczne pozwalają bowiem na wykonywanie obliczeń praktycznie według dowolnych wzorów matematycznych, a więc w szeregu przypadkach można nie uciekać się do uproszczeń stosowanych niejednokrotnie dotychczas. Jak wspomniano w wielu miejscach niniejszej pracy, szereg wzorów, z których korzystano jedynie w formie przybliżeń aktualnych dla określonych zakresów, można przeliczyć dokładnie i wobec tego pojawiło się wiele nowych opracowań tabel podstawowych wartości.

Przebiegi przypadkowe występujące w rzeczywistym strumieniu zgłoszeń z bardzo dużą dokładnością mogą być wprowadzone przy użyciu odpowiedniego zapisu do maszyny cyfrowej, tak że przy różnym rozkładzie czasu obsługi, różnym rozkładzie oczekiwania, strat i tp. można uzyskać niemal rzeczywiste przebiegi w systemie obsługi. Wyniki uzyskiwane są przy tym, ze względu na dużą szybkość maszyn cyfrowych, w czasie tak krótkim, że możliwa jest korekta obliczeń w okresie projektowania sieci telekomunikacyjnej. Nic więc dziwnego, że występuje istotna tendencja wykorzystywania metod symulacyjnych dla przypadków, które trzeba było uważać dotychczas jako trudniejsze, to znaczy dla przypadków obsługi z cząstkowym zwielokrotnieniem wyjść, szczególnie w systemie z opóźnianiem zgłoszeń; bardziej złożonych przypadków opóźniania zgłoszeń z ograniczonym czasem opóźniania zgłoszeń oraz ograniczoną ilością zgłoszeń oczekujących na początek obsługi, różnych trudniejszych przypadków układów wielosekcyjnych, z cząstkowym zwielokrotnieniem wyjść i opóźnianiem zgłoszeń i tp.

Dodajmy jeszcze, że bardzo dużym zainteresowaniem cieszą się obecnie systemy obsługi ze stratami zgłoszeń w przypadkach, gdy zgłoszenia tracone są ponawiane i powracają do danego systemu obsługi. Obok zasadniczych opracowań w tej dziedzinie pojawiają się opracowania wykorzystujące metody symulacyjne.

N A[Erl]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
1,6	0,98 0,17	0,53 0,16	0,24 0,09	0,090 0,03	0,028 0,01	0,008 0	0,002 0						
1,7	1,07 0,18	0,59 0,18	0,28 0,11	0,11 0,04	0,037 0,01	0,010 0	0,003 0	0,001 0					
1,8	1,16 0,20	0,66 0,20	0,32 0,13	0,14 0,05	0,047 0,02	0,014 0	0,004 0	0,001 0					
1,9	1,24 0,21	0,73 0,23	0,37 0,15	0,16 0,07	0,059 0,02	0,019 0,01	0,005 0	0,001 0					
2,0	1,33 0,22	0,80 0,25	0,42 0,17	0,19 0,08	0,073 0,03	0,024 0,01	0,007 0	0,002 0					
2,1	1,42 0,24	0,87 0,27	0,47 0,19	0,22 0,10	0,089 0,04	0,031 0,01	0,009 0	0,002 0	0,001 0				
2,2	1,51 0,25	0,95 0,30	0,53 0,22	0,26 0,12	0,11 0,05	0,039 0,02	0,012 0	0,003 0	0,001 0				
2,3	1,60 0,26	1,02 0,32	0,58 0,25	0,29 0,14	0,13 0,06	0,048 0,02	0,016 0,01	0,004 0	0,001 0				
2,4	1,69 0,27	1,10 0,34	0,64 0,27	0,33 0,16	0,15 0,07	0,058 0,03	0,020 0,01	0,006 0	0,002 0				
2,5	1,79 0,28	1,18 0,36	0,71 0,30	0,37 0,19	0,17 0,09	0,071 0,03	0,025 0,01	0,008 0	0,002 0	0,001 0			
2,6	1,88 0,29	1,26 0,39	0,77 0,33	0,42 0,21	0,20 0,10	0,084 0,04	0,031 0,01	0,010 0	0,003 0	0,001 0			
2,7	1,97 0,31	1,34 0,41	0,83 0,36	0,47 0,24	0,23 0,12	0,10 0,05	0,038 0,02	0,013 0,01	0,004 0	0,001 0			
2,8	2,06 0,32	1,42 0,43	0,90 0,39	0,51 0,27	0,26 0,14	0,12 0,06	0,046 0,02	0,016 0,01	0,005 0	0,001 0			
2,9	2,16 0,33	1,50 0,46	0,97 0,42	0,57 0,30	0,29 0,16	0,14 0,07	0,055 0,03	0,020 0,01	0,006 0	0,002 0			

re Zahl – Verkehrswert R des Verkehrsrestes Untere Zahl – Streuwert Δ des Verkehrsrestes

N A [Erl]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3,0	2,25	1,59	1,04	0,62	0,33	0,16	0,063	0,024	0,008	0,002	0,001			
	0,34	0,48	0,45	0,33	0,19	0,09	0,03	0,01	0	0	0			
3,1	2,34	1,67	1,11	0,67	0,37	0,18	0,077	0,030	0,010	0,003	0,001			
	0,35	0,50	0,48	0,36	0,21	0,10	0,04	0,01	0	0	0			
3,2	2,44	1,76	1,18	0,73	0,41	0,20	0,090	0,036	0,013	0,004	0,001			
	0,36	0,52	0,51	0,39	0,24	0,12	0,05	0,02	0,01	0	0			
3,3	2,53	1,84	1,26	0,79	0,45	0,23	0,10	0,043	0,016	0,005	0,002			
	0,37	0,54	0,54	0,42	0,27	0,14	0,06	0,02	0,01	0	0			
3,4	2,63	1,93	1,33	0,85	0,49	0,26	0,12	0,051	0,019	0,006	0,002	0,001		
	0,33	0,56	0,57	0,46	0,30	0,16	0,07	0,03	0,01	0	0	0		
3,5	2,72	2,02	1,41	0,91	0,54	0,29	0,14	0,060	0,023	0,008	0,003	0,001		
	0,38	0,58	0,60	0,49	0,33	0,18	0,08	0,03	0,01	0	0	0		
3,6	2,82	2,11	1,48	0,97	0,59	0,32	0,16	0,070	0,028	0,010	0,003	0,001		
	0,39	0,60	0,63	0,53	0,36	0,21	0,10	0,04	0,01	0	0	0		
3,7	2,91	2,19	1,56	1,04	0,64	0,36	0,18	0,081	0,033	0,012	0,004	0,001		
	0,40	0,62	0,66	0,56	0,40	0,23	0,12	0,05	0,02	0,01	0	0		
3,8	3,01	2,28	1,64	1,11	0,69	0,39	0,20	0,093	0,039	0,015	0,005	0,002		
	0,41	0,64	0,69	0,60	0,43	0,26	0,13	0,06	0,02	0,01	0	0		
3,9	3,10	2,37	1,72	1,17	0,74	0,43	0,23	0,11	0,046	0,018	0,006	0,002	0,001	
	0,42	0,66	0,72	0,64	0,47	0,29	0,15	0,07	0,03	0,01	0	0	0	
4,0	3,20	2,46	1,80	1,24	0,80	0,47	0,25	0,12	0,053	0,021	0,008	0,003	0,001	
	0,43	0,68	0,75	0,67	0,51	0,32	0,17	0,08	0,03	0,01	0	0	0	
4,1	3,30	2,55	1,88	1,31	0,85	0,51	0,28	0,14	0,062	0,025	0,009	0,003	0,001	
	0,43	0,70	0,78	0,71	0,54	0,35	0,20	0,09	0,04	0,01	0	0	0	
4,2	3,39	2,64	1,97	1,38	0,91	0,55	0,31	0,16	0,071	0,030	0,011	0,004	0,001	
	0,44	0,71	0,81	0,75	0,58	0,39	0,22	0,11	0,05	0,02	0,01	0	0	
4,3	3,49	2,73	2,05	1,46	0,97	0,60	0,34	0,17	0,082	0,035	0,014	0,005	0,002	
	0,45	0,73	0,83	0,78	0,62	0,42	0,25	0,12	0,05	0,02	0,01	0	0	
4,4	3,59	2,82	2,13	1,53	1,03	0,65	0,37	0,20	0,093	0,041	0,016	0,006	0,002	0,001
	0,46	0,75	0,86	0,82	0,66	0,46	0,27	0,14	0,05	0,03	0,01	0	0	0
4,5	3,68	2,92	2,22	1,61	1,09	0,69	0,41	0,22	0,11	0,047	0,019	0,007	0,002	0,001
	0,46	0,76	0,89	0,85	0,70	0,50	0,30	0,16	0,07	0,03	0,01	0	0	0
4,6	3,78	3,01	2,30	1,68	1,16	0,74	0,44	0,24	0,12	0,054	0,023	0,009	0,003	0,001
	0,47	0,78	0,92	0,89	0,74	0,54	0,33	0,18	0,09	0,04	0,01	0	0	0
4,7	3,88	3,10	2,39	1,76	1,22	0,80	0,48	0,27	0,13	0,063	0,027	0,010	0,004	0,001
	0,48	0,80	0,94	0,93	0,78	0,58	0,37	0,20	0,10	0,04	0,02	0,01	0	0

Charakteristische Größen für Verkehrsreste von vollkommenen Leitungsbündeln Obere Zahl = Ver

N A [Erl]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
4,8	3,97	3,19	2,47	1,83	1,29	0,85	0,52	0,29	0,15	0,071	0,031	0,012	0,005	0,002	0,001												
	0,48	0,81	0,97	0,96	0,83	0,62	0,40	0,23	0,11	0,05	0,02	0,01	0	0	0												
4,9	4,07	3,29	2,56	1,91	1,36	0,90	0,56	0,32	0,17	0,081	0,036	0,015	0,006	0,002	0,001												
	0,49	0,83	0,99	1,00	0,87	0,66	0,44	0,25	0,13	0,06	0,02	0,01	0	0	0												
5,0	4,17	3,38	2,65	1,99	1,42	0,96	0,60	0,35	0,19	0,092	0,041	0,017	0,007	0,002	0,001												
	0,50	0,84	1,02	1,03	0,91	0,70	0,47	0,28	0,15	0,07	0,03	0,01	0	0	0												
5,5	4,65	3,85	3,09	2,40	1,78	1,26	0,84	0,52	0,30	0,16	0,079	0,036	0,015	0,006	0,002	0,001											
	0,53	0,91	1,14	1,20	1,12	0,92	0,68	0,44	0,25	0,13	0,06	0,03	0,01	0	0	0											
6,0	5,14	4,32	3,54	2,82	2,16	1,59	1,11	0,73	0,45	0,26	0,14	0,068	0,031	0,013	0,005	0,002	0,001										
	0,55	0,97	1,25	1,36	1,32	1,16	0,91	0,64	0,40	0,23	0,12	0,05	0,02	0,01	0	0	0										
6,5	5,63	4,80	4,00	3,25	2,56	1,94	1,41	0,98	0,64	0,39	0,22	0,12	0,058	0,027	0,012	0,005	0,002	0,001									
	0,57	1,03	1,35	1,51	1,52	1,39	1,16	0,87	0,60	0,37	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0	0	0									
7,0	6,13	5,28	4,46	3,69	2,97	2,32	1,74	1,25	0,85	0,55	0,33	0,19	0,10	0,050	0,023	0,010	0,004	0,002	0,001								
	0,60	1,08	1,44	1,65	1,71	1,62	1,41	1,13	0,82	0,54	0,33	0,18	0,09	0,04	0,02	0,01	0	0	0								
7,5	6,62	5,76	4,93	4,14	3,40	2,71	2,09	1,56	1,11	0,75	0,48	0,29	0,16	0,086	0,043	0,020	0,009	0,004	0,001	0,001							
	0,61	1,13	1,52	1,78	1,88	1,84	1,67	1,40	1,08	0,76	0,49	0,29	0,16	0,08	0,04	0,02	0,01	0	0	0							
8,0	7,11	6,24	5,40	4,60	3,83	3,12	2,47	1,88	1,39	0,97	0,65	0,41	0,25	0,14	0,073	0,036	0,017	0,008	0,003	0,001							
	0,63	1,17	1,60	1,89	2,05	2,06	1,92	1,68	1,35	1,01	0,70	0,44	0,25	0,14	0,07	0,03	0,01	0,01	0	0							
8,5	7,61	6,73	5,88	5,06	4,27	3,54	2,85	2,23	1,69	1,23	0,85	0,56	0,35	0,21	0,12	0,062	0,031	0,015	0,006	0,003	0,001						
	0,65	1,21	1,67	2,00	2,20	2,26	2,17	1,95	1,65	1,29	0,94	0,63	0,39	0,22	0,12	0,06	0,03	0,01	0	0	0						
9,0	8,10	7,22	6,36	5,52	4,72	3,96	3,25	2,60	2,02	1,51	1,09	0,75	0,49	0,30	0,18	0,10	0,052	0,026	0,012	0,006	0,002	0,001					
	0,66	1,24	1,73	2,10	2,34	2,44	2,40	2,23	1,94	1,59	1,21	0,86	0,56	0,34	0,19	0,10	0,05	0,02	0,01	0	0	0					
9,5	8,60	7,71	6,84	5,99	5,18	4,40	3,67	2,99	2,37	1,82	1,35	0,96	0,65	0,42	0,26	0,15	0,084	0,044	0,022	0,010	0,005	0,002	0,001				
	0,68	1,28	1,79	2,19	2,47	2,62	2,63	2,49	2,24	1,90	1,51	1,12	0,78	0,50	0,30	0,17	0,09	0,04	0,02	0,01	0	0	0				
10,0	9,09	8,20	7,32	6,47	5,64	4,85	4,09	3,38	2,73	2,15	1,63	1,20	0,84	0,57	0,36	0,22	0,13	0,071	0,037	0,019	0,009	0,004	0,002	0,001			
	0,69	1,31	1,84	2,27	2,59	2,78	2,84	2,75	2,54	2,22	1,83	1,42	1,03	0,70	0,44	0,26	0,14	0,07	0,04	0,02	0,01	0	0	0			
10,5	9,59	8,69	7,80	6,94	6,10	5,30	4,52	3,79	3,11	2,49	1,94	1,46	1,06	0,74	0,49	0,31	0,19	0,11	0,060	0,032	0,016	0,008	0,003	0,002	0,001		
	0,70	1,33	1,89	2,35	2,70	2,94	3,03	2,99	2,82	2,53	2,16	1,74	1,32	0,94	0,62	0,39	0,22	0,12	0,06	0,03	0,01	0,01	0	0	0		
11,0	10,08	9,18	8,29	7,42	6,57	5,75	4,96	4,21	3,51	2,86	2,27	1,75	1,30	0,94	0,65	0,43	0,27	0,16	0,093	0,051	0,027	0,013	0,006	0,003	0,001	0,001	
	0,71	1,36	1,94	2,42	2,81	3,08	3,22	3,23	3,10	2,85	2,49	2,08	1,63	1,21	0,84	0,55	0,34	0,19	0,10	0,05	0,03	0,01	0,01	0	0	0	
11,5	10,58	9,67	8,78	7,90	7,04	6,21	5,41	4,64	3,91	3,23	2,61	2,06	1,57	1,16	0,83	0,56	0,37	0,23	0,14	0,079	0,043	0,022	0,011	0,005	0,002	0,001	
	0,72	1,38	1,98	2,49	2,90	3,21	3,39	3,45	3,36	3,15	2,83	2,42	1,97	1,52	1,10	0,75	0,48	0,29	0,16	0,09	0,05	0,02	0,01	0	0	0	
12,0	11,08	10,16	9,27	8,38	7,52	6,67	5,86	5,07	4,33	3,62	2,97	2,38	1,86	1,41	1,03	0,72	0,49	0,32	0,20	0,12	0,067	0,036	0,019	0,009	0,005	0,002	0,001
	0,73	1,41	2,02	2,55	2,99	3,33	3,56	3,65	3,62	3,45	3,16	2,77	2,33	1,85	1,40	0,99	0,67	0,42	0,25	0,14	0,08	0,04	0,02	0,01	0	0	0

N A [Erl]	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
13	0,001 0	0,001 0																									
14	0,005 0	0,002 0	0,001 0																								
15	0,013 0,01	0,007 0,01	0,003 0	0,002 0	0,001 0																						
16	0,031 0,04	0,017 0,02	0,009 0,01	0,005 0	0,002 0	0,001 0	0,001 0																				
17	0,066 0,09	0,038 0,05	0,022 0,03	0,012 0,01	0,006 0,01	0,003 0	0,002 0	0,001 0																			
18	0,13 0,19	0,079 0,11	0,047 0,06	0,027 0,02	0,015 0,01	0,008 0,01	0,004 0	0,002 0	0,001 0	0,001 0																	
19	0,23 0,37	0,15 0,23	0,093 0,14	0,057 0,08	0,034 0,04	0,019 0,02	0,011 0,01	0,006 0,01	0,003 0	0,002 0	0,001 0																
20	0,38 0,66	0,26 0,43	0,17 0,27	0,11 0,17	0,068 0,10	0,041 0,06	0,024 0,03	0,014 0,02	0,008 0,01	0,004 0	0,002 0	0,001 0	0,001 0														
21	0,58 1,09	0,41 0,75	0,29 0,50	0,19 0,32	0,13 0,20	0,079 0,12	0,049 0,07	0,029 0,04	0,017 0,02	0,010 0,01	0,005 0,01	0,003 0	0,002 0	 0,001													
22	0,85 1,66	0,63 1,21	0,45 0,85	0,32 0,57	0,22 0,38	0,14 0,24	0,092 0,15	0,058 0,09	0,035 0,05	0,021 0,03	0,012 0,02	0,007 0,01	0,004 0	0,002 0	0,001 0	0,001 0											
23	1,19 2,39	0,91 1,82	0,68 1,33	0,49 0,95	0,35 0,65	0,24 0,43	0,16 0,28	0,11 0,17	0,067 0,11	0,042 0,06	0,025 0,04	0,015 0,02	0,009 0,01	0,005 0,01	0,003 0	0,001 0	0,001 0										
24	1,60 3,26	1,25 2,58	0,96 1,97	0,72 1,47	0,53 1,05	0,38 0,73	0,26 0,49	0,18 0,32	0,12 0,20	0,077 0,13	0,049 0,08	0,030 0,04	0,018 0,03	0,011 0,01	0,006 0,01	0,003 0	0,002 0	0,001 0	0,001 0								
25	2,07 4,24	1,67 3,47	1,32 2,76	1,02 2,14	0,77 1,60	0,57 1,16	0,41 0,82	0,29 0,56	0,20 0,37	0,13 0,24	0,088 0,15	0,057 0,09	0,035 0,05	0,021 0,03	0,013 0,02	0,007 0,01	0,004 0,01	0,002 0	0,001 0	0,001 0							
26	2,60 5,31	2,14 4,48	1,73 3,69	1,38 2,96	1,07 2,30	0,82 1,74	0,61 1,28	0,45 0,91	0,32 0,63	0,22 0,42	0,15 0,28	0,10 0,17	0,065 0,11	0,041 0,06	0,025 0,04	0,015 0,02	0,009 0,01	0,005 0,01	0,003 0	0,002 0	0,001 0						
27	3,19 6,42	2,68 5,57	2,21 4,72	1,80 3,91	1,44 3,15	1,13 2,47	0,87 1,89	0,65 1,40	0,48 1,01	0,35 0,70	0,24 0,48	0,17 0,32	0,11 0,20	0,074 0,13	0,047 0,08	0,030 0,05	0,018 0,03	0,011 0,02	0,006 0,01	0,004 0	0,002 0	0,001 0	0,001 0				
28	3,83 7,56	3,26 6,71	2,75 5,84	2,23 4,97	1,86 4,13	1,50 3,35	1,18 2,65	0,91 2,03	0,69 1,52	0,51 1,10	0,37 0,78	0,27 0,54	0,18 0,36	0,13 0,23	0,084 0,15	0,054 0,09	0,035 0,06	0,021 0,03	0,013 0,02	0,008 0,01	0,005 0,01	0,003 0	0,001 0	0,001 0			
29	4,51 8,69	3,90 7,87	3,34 7,00	2,82 6,10	2,35 5,21	1,93 4,36	1,55 3,55	1,23 2,82	0,96 2,19	0,73 1,65	0,55 1,21	0,40 0,86	0,29 0,60	0,20 0,40	0,14 0,27	0,094 0,17	0,062 0,11	0,040 0,07	0,025 0,04	0,015 0,02	0,009 0,01	0,006 0,01	0,003 0	0,002 0	0,001 0	0,001 0	
30	5,23 9,79	4,58 9,02	3,97 8,18	3,41 7,29	2,89 6,37	2,41 5,46	1,99 4,58	1,61 3,75	1,29 3,00	1,01 2,34	0,78 1,78	0,58 1,32	0,43 0,95	0,31 0,66	0,22 0,45	0,15 0,30	0,10 0,20	0,070 0,13	0,045 0,08	0,029 0,05	0,018 0,03	0,011 0,02	0,007 0,01	0,004 0,01	0,002 0	0,001 0	0,001 0

N A [Erl]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
13	12,07	11,15	10,24	9,35	8,47	7,61	6,77	5,96	5,18	4,44	3,74	3,09	2,49	1,97	1,51	1,12	0,80	0,55	0,37	0,24	0,14	0,085	0,048	0,026	0,013	0,007	0,003
	0,75	1,45	2,09	2,66	3,15	3,55	3,85	4,03	4,08	4,00	3,80	3,48	3,06	2,58	2,08	1,59	1,15	0,79	0,51	0,32	0,18	0,10	0,05	0,03	0,01	0,01	0
14	13,07	12,14	11,23	10,32	9,43	8,56	7,70	6,87	6,06	5,28	4,54	3,84	3,19	2,60	2,07	1,60	1,21	0,88	0,62	0,42	0,27	0,17	0,10	0,061	0,034	0,018	0,009
	0,76	1,48	2,15	2,75	3,29	3,74	4,10	4,36	4,49	4,51	4,39	4,15	3,79	3,35	2,84	2,31	1,79	1,32	0,93	0,62	0,39	0,23	0,13	0,07	0,04	0,02	0,01
15	14,06	13,13	12,21	11,30	10,40	9,51	8,64	7,79	6,96	6,16	5,38	4,64	3,95	3,30	2,70	2,17	1,70	1,29	0,96	0,68	0,47	0,32	0,20	0,13	0,075	0,043	0,024
	0,78	1,51	2,20	2,84	3,41	3,91	4,33	4,65	4,86	4,96	4,93	4,77	4,50	4,11	3,64	3,10	2,54	1,99	1,49	1,07	0,73	0,47	0,29	0,17	0,10	0,05	0,03
16	15,06	14,12	13,20	12,28	11,37	10,47	9,59	8,72	7,88	7,05	6,25	5,48	4,74	4,05	3,40	2,80	2,27	1,79	1,38	1,03	0,75	0,53	0,36	0,24	0,15	0,091	0,054
	0,79	1,54	2,25	2,91	3,52	4,06	4,52	4,90	5,18	5,36	5,41	5,35	5,16	4,85	4,43	3,93	3,36	2,78	2,20	1,67	1,21	0,84	0,56	0,35	0,21	0,12	0,07
17	16,06	15,12	14,18	13,26	12,35	11,44	10,55	9,67	8,80	7,96	7,14	6,34	5,57	4,84	4,15	3,50	2,90	2,36	1,88	1,46	1,10	0,81	0,58	0,40	0,27	0,17	0,11
	0,80	1,56	2,29	2,98	3,61	4,19	4,69	5,12	5,47	5,71	5,85	5,87	5,77	5,54	5,20	4,75	4,22	3,63	3,02	2,41	1,86	1,37	0,96	0,65	0,42	0,26	0,15
18	17,05	16,11	15,17	14,24	13,32	12,41	11,51	10,62	9,74	8,88	8,04	7,22	6,43	5,66	4,93	4,24	3,59	3,00	2,45	1,97	1,54	1,18	0,88	0,63	0,45	0,30	0,20
	0,81	1,59	2,33	3,04	3,69	4,30	4,85	5,32	5,72	6,03	6,23	6,33	6,32	6,18	5,92	5,55	5,08	4,52	3,90	3,26	2,63	2,04	1,53	1,09	0,75	0,49	0,31
19	18,05	17,10	16,16	15,23	14,30	13,39	12,48	11,58	10,69	9,82	8,96	8,12	7,31	6,52	5,75	5,03	4,34	3,69	3,09	2,54	2,05	1,62	1,25	0,94	0,69	0,49	0,34
	0,82	1,61	2,36	3,99	3,77	4,40	4,98	5,50	5,94	6,30	6,58	6,75	6,82	6,77	6,60	6,31	5,90	5,40	4,31	4,17	3,51	2,85	2,24	1,69	1,23	0,86	0,57
20	19,05	18,10	17,16	16,22	15,29	14,36	13,45	12,54	11,64	10,76	9,89	9,04	8,20	7,39	6,60	5,84	5,11	4,43	3,78	3,18	2,63	2,13	1,70	1,32	1,00	0,74	0,54
	0,82	1,62	2,40	3,13	3,84	4,49	5,10	5,65	6,14	6,55	6,89	7,12	7,26	7,29	7,21	7,01	6,69	6,26	5,73	5,11	4,45	3,76	3,08	2,43	1,86	1,37	0,97
21	20,05	19,09	18,15	17,21	16,27	15,34	14,42	13,51	12,60	11,71	10,83	9,96	9,11	8,28	7,47	6,68	5,93	5,20	4,51	3,87	3,27	2,71	2,22	1,78	1,39	1,07	0,80
	0,83	1,64	2,42	3,18	3,90	4,58	5,21	5,79	6,32	6,78	7,16	7,46	7,67	7,77	7,77	7,65	7,42	7,07	6,61	6,05	5,42	4,72	4,01	3,30	2,64	2,03	1,51
22	21,04	20,09	19,14	18,20	17,26	16,32	15,40	14,48	13,57	12,66	11,77	10,90	10,03	9,18	8,35	7,55	6,76	6,01	5,29	4,60	3,95	3,35	2,80	2,30	1,85	1,46	1,13
	0,84	1,66	2,45	3,22	3,95	4,65	5,31	5,92	6,48	6,97	7,40	7,76	8,03	8,20	8,28	8,24	8,09	7,83	7,45	6,96	6,38	5,72	5,00	4,26	3,53	2,84	2,21
23	22,04	21,09	20,14	19,19	18,25	17,31	16,38	15,45	14,53	13,63	12,73	11,84	10,96	10,10	9,26	8,43	7,62	6,84	6,09	5,37	4,68	4,04	3,43	2,88	2,38	1,93	1,53
	0,84	1,67	2,47	3,25	4,00	4,72	5,40	6,03	6,62	7,15	7,62	8,03	8,35	8,59	8,73	8,78	8,71	8,53	8,24	7,83	7,31	6,71	6,02	5,28	4,52	3,77	3,05
24	23,04	22,08	21,13	20,18	19,23	18,29	17,36	16,43	15,51	14,59	13,68	12,79	11,90	11,03	10,17	9,33	8,50	7,70	6,92	6,17	5,45	4,77	4,12	3,52	2,96	2,45	2,00
	0,85	1,68	2,50	3,28	4,05	4,78	5,48	6,13	6,75	7,31	7,82	8,27	8,64	8,94	9,15	9,26	9,27	9,18	8,97	8,64	8,21	7,67	7,03	6,33	5,57	4,78	4,00
25	24,04	23,08	22,12	21,17	20,22	19,28	18,34	17,41	16,48	15,56	14,65	13,74	12,85	11,96	11,09	10,24	9,40	8,57	7,77	7,00	6,25	5,53	4,85	4,20	3,60	3,04	2,53
	0,86	1,70	2,52	3,31	4,09	4,83	5,55	6,23	6,87	7,46	8,00	8,49	8,91	9,25	9,52	9,70	9,79	9,77	9,64	9,40	9,05	8,59	8,02	7,36	6,63	5,85	5,04
26	25,04	24,08	23,12	22,17	21,21	20,27	19,33	18,39	17,46	16,53	15,61	14,70	13,80	12,91	12,02	11,16	10,30	9,46	8,64	7,85	7,07	6,32	5,61	4,92	4,28	3,67	3,11
	0,86	1,71	2,53	3,34	4,13	4,88	5,62	6,31	6,97	7,59	8,16	8,68	9,14	9,54	9,86	10,10	10,25	10,30	10,26	10,10	9,83	9,46	8,97	8,38	7,69	6,94	6,13
27	26,04	25,07	24,11	23,16	22,21	21,26	20,31	19,37	18,43	17,50	16,58	15,66	14,75	13,85	12,96	12,08	11,22	10,37	9,53	8,71	7,92	7,15	6,40	5,68	5,00	4,36	3,75
	0,87	1,72	2,55	3,37	4,16	4,93	5,68	6,39	7,07	7,71	8,31	8,86	9,36	9,79	10,16	10,46	10,67	10,79	10,82	10,74	10,56	10,27	9,86	9,34	8,73	8,02	7,25
28	27,03	26,07	25,11	24,15	23,20	22,25	21,30	20,35	19,42	18,48	17,55	16,63	15,72	14,81	13,91	13,02	12,14	11,28	10,43	9,60	8,78	7,99	7,22	6,47	5,76	5,08	4,43
	0,87	1,73	2,57	3,39	4,19	4,98	5,73	6,46	7,16	7,82	8,45	9,02	9,55	10,03	10,44	10,78	11,05	11,24	11,33	11,33	11,23	11,02	10,70	10,26	9,72	9,08	8,35
29	28,03	27,07	26,11	25,15	24,19	23,24	22,29	21,34	20,40	19,46	18,53	17,60	16,68	15,77	14,86	13,96	13,08	12,20	11,34	10,49	9,66	8,85	8,06	7,29	6,55	5,83	5,15
	0,87	1,74	2,58	3,41	4,22	5,02	5,78	6,53	7,24	7,92	8,57	9,17	9,73	10,24	10,69	11,08	11,40	11,64	11,80	11,87	11,84	11,71	11,47	11,12	10,67	10,10	9,44
30	29,03	28,07	27,10	26,14	25,18	24,23	23,28	22,33	21,38	20,44	19,50	18,57	17,65	16,73	15,82	14,91	14,02	13,14	12,26	11,40	10,56	9,73	8,92	8,13	7,36	6,62	5,91
	0,88	1,74	2,60	3,43	4,25	5,05	5,83	6,59	7,32	8,01	8,68	9,31	9,89	10,43	10,92	11,35	11,72	12,01	12,23	12,36	12,40	12,35	12,19	11,93	11,55	11,07	10,48

WYKAZ LITERATURY

1. Brockmeyer E., Halström H.L. i Jensen A.: The life and works of A.K. Erlang KTCO, Kopenhaga 1948 /przytoczone i częściowo skomentowane publikacje Erlanga z lat 1909-1925/.
2. Berkeley G.S.: Traffic and trunking principles in automatic telephony. Ernest Benn Ltd. London 1949.
3. Kuhn S.: Zagadnienia ruchowe w telefonii automatycznej. PWN, Warszawa 1957.
4. Syski R.: Introduction to congestion theory in telephone systems. Oliver and Boyd, London 1960.
5. Eldin A.E. i Lind G.: Elementary telephony traffic theory. L.M. Ericsson, Stockholm 1964.
6. Chinczin A.J.: Raboty po matematiczeskoj teorii massowowo obsłużiwania. I.F.M.L., Moskwa 1963.
7. Palm C.: Specialnumer för teletraffic. Tele, Stockholm 1949 /ang. 1957 r./ /5 artykułów dotyczących ruchu ze stratami oraz ruchu z oczekiwaniem/.
8. Palm C.: Tables of Erlang Loss Formulae L.M. Ericsson, Stockholm 1947.
9. Crommellin E.G.: Delay probability formulae when the holding times are constant POEEJ, London, April 1932-34.
10. O'Dell G.F.: An outline of the trunking aspect of automatic telephony. PIEE, London, luty 1927.

11. Trechciński J.: Obliczanie układu pola stopniowanego. Przegląd Telekomunikacyjny nr 10, Warszawa, 1952.

12. Trechciński J.: Szukacze liniowe stopniowane i ich obliczanie. Przegląd Telekomunikacyjny nr 7, Warszawa 1959.

13. Jacobaeus C.: Study on congestion in link systems. Ericsson Technics nr 48, Stockholm 1950.

14. Elldin A.: Automatic telephone exchanges with Crossbar switches - switch calculation. L.M. Ericsson, Stockholm 1955.

15. Rumpf K.H.: Koordinatenschalter - Elektronik. Verlag V.P.S. Busch, Berlin 1961.

16. Lotze A.: Tables of the modified Palm-Jacobaeus loss formula. Politechnika Stuttgardzka 1963.

17. Klimontowicz A.: Obliczanie wyposażenia central telefonicznych. WKiŁ. Warszawa 1967.

18. Wilkinson R.J.: Theories for toll traffic engineering in USA, BSTJ nr 2, New York 1956.

19. Tånge I.: Optimalmetoder för bestämming av vior och ledningstal. Tele, Stockholm 1957 /ang. 1959/.

20. Bretschneider G.: Die Berechnung von Leitungsgruppen für überfliessenden Verkehr in Fernsprechwählanlagen, NTZ nr 11, München 1956.

21. Kuhn S.: Obliczanie wyposażenia central telefonicznych z wybierakami biegowymi. WKiŁ, Warszawa 1965.

22. Charkiewicz A.D.: Pribliżonnyj metod rasczziota czisła sojedinitielnych ustrojstw a ATS koordinatnoj sistemy. Elektroswiaź nr 2, 1959, str. 55-63.

23. HeinrichG., Trautmann K.: Simplified standard gradings behind single-stage switching arrangements. Nachrichtentechnische Zeitschrift, Heft 7, 1968, str. 412-417.

24. Herzog U.: Adaptation of the MPJ loss formula to gradings of Various Type. Institute for Switching and Data Technics, Technical University Stuttgart, 4 th report on studies in congestion theory, Stuttgart 1967.

25. Liwszic B.S., Fidlin J.W.: Sistemy massowowo obsłużiwanija s koniecznym czisłom istocznikow, Izdatielstwo "Swiaź", Moskwa 1968.

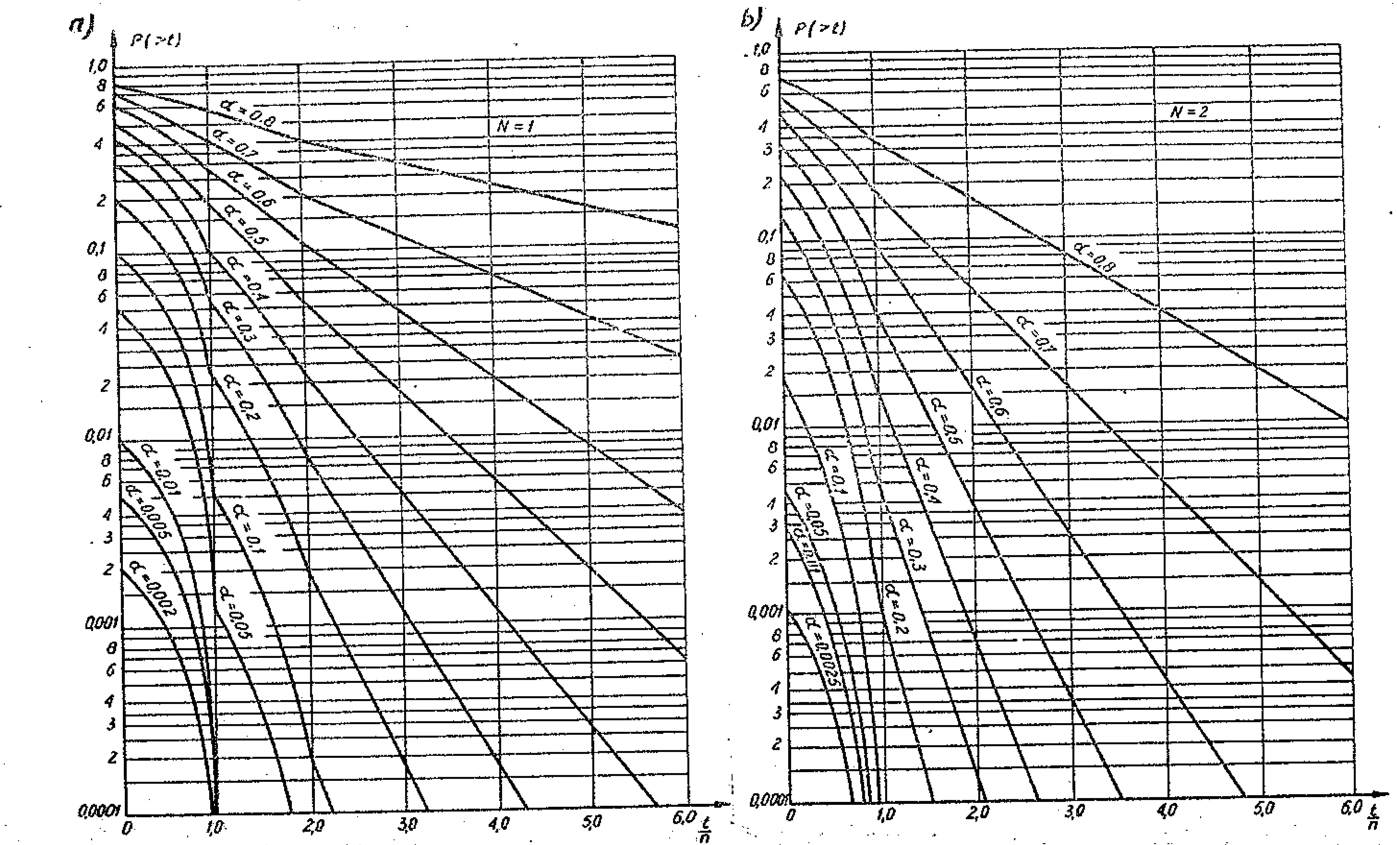
26. Lotze A.: History and development of grading theory. Reprints of technical papers Fifth International Teletraffic Congress. New York, June 14-20, 1967, str. 148-161.

27. Praca zbiorowa: Mietodika rasczziota oborudowanija ATS koordinatnych sistiem. Swiazizdat, Moskwa 1961.

28. Tablice inżynierskie do obliczania ilości organów łączeniowych dla MCA i ACMM. IŁ. Warszawa 1967.

29. Baszarin G.P., Charkiewicz A.D., Szneps M.A.: Massowoje obsłużiwanje w telefonii. Izdatielstwo "Nauka", Moskwa 1968.

30. Praca zbiorowa: Zagadnienia ruchu telefonicznego. WKŁ. Warszawa 1971 r.



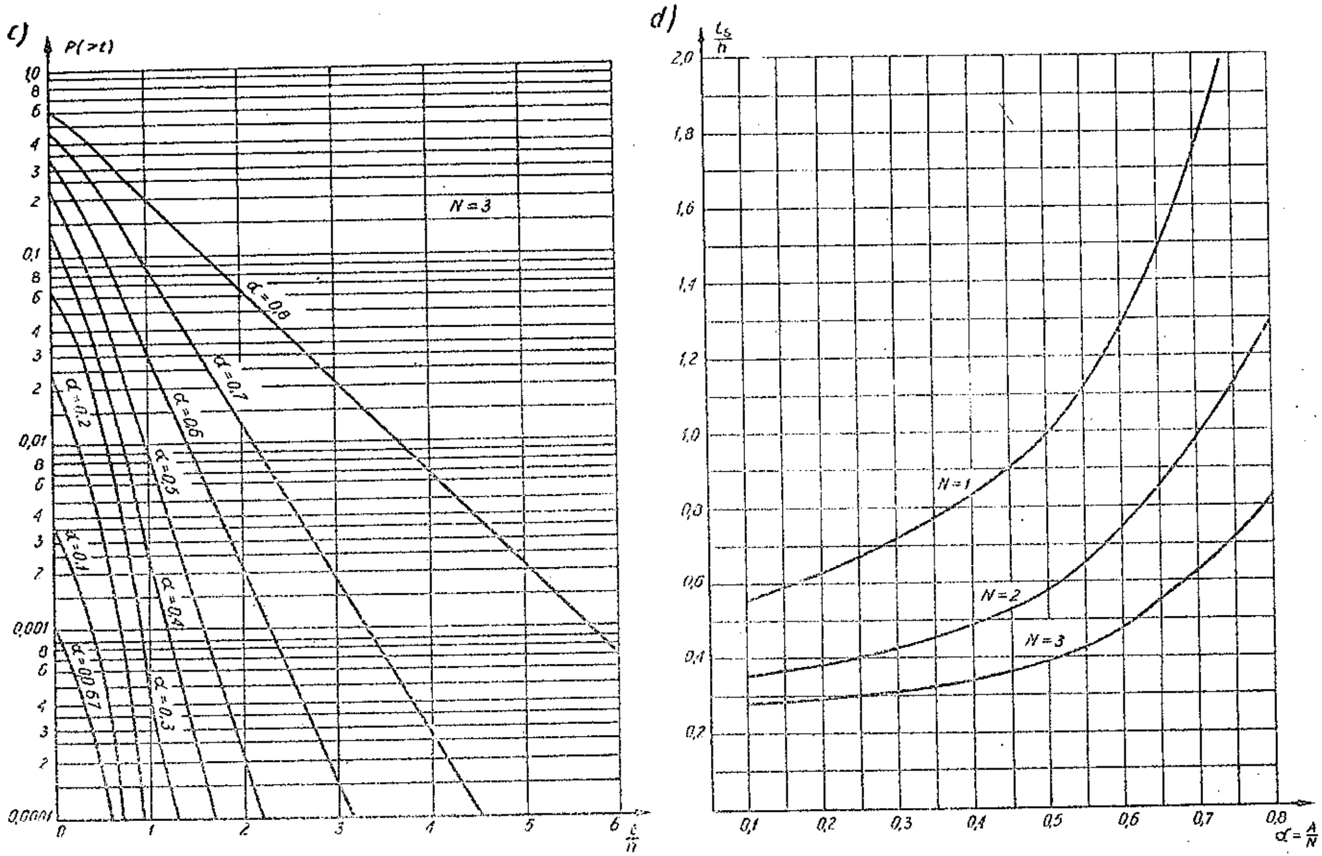
$P/>t/$ - prawdopodobieństwo opóźnienia większego niż określony czas t,

$\alpha = \frac{A}{N}$ - średnie natężenie ruchu oferowanego każdemu aparatowi obsługi,

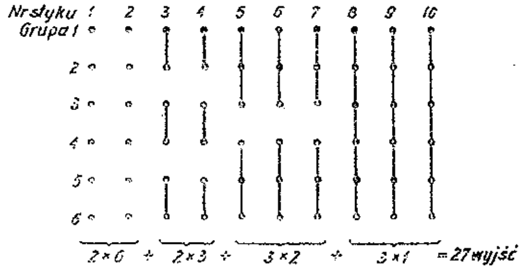
h - czas obsługi każdego zgłoszenia,

t_s - przeciętne opóźnienie odniesione tylko do tych zgłoszeń, które podlegają opóźnieniu

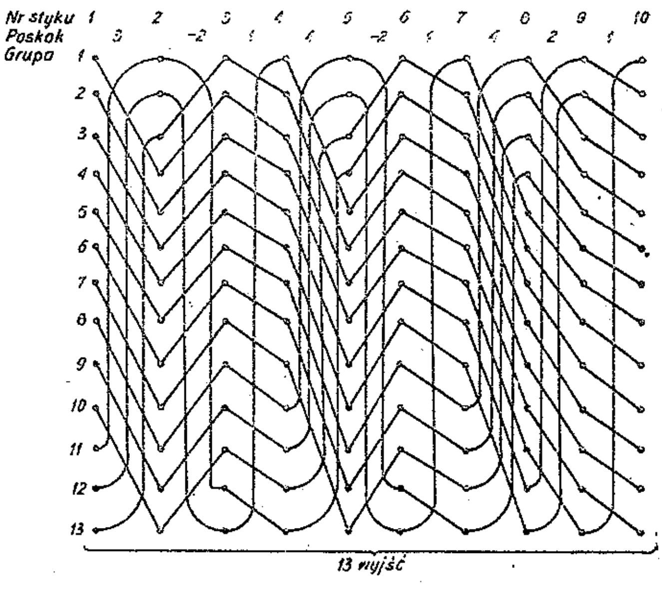
Rys. 1a i b. Wykresy prawdopodobieństwa opóźnienia według Crommelina dla N=1 i N=2



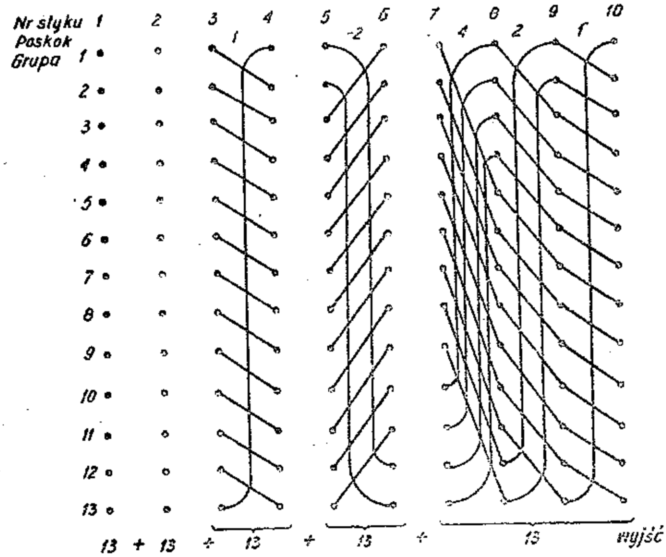
Rys. 1c i d. Wykresy prawdopodobieństwa opóźnienia dla N=3 i przeciętnego opóźnienia dla N=1, 2 i 3 według Crommelina /oznaczenia jak na rys. 1a i b/



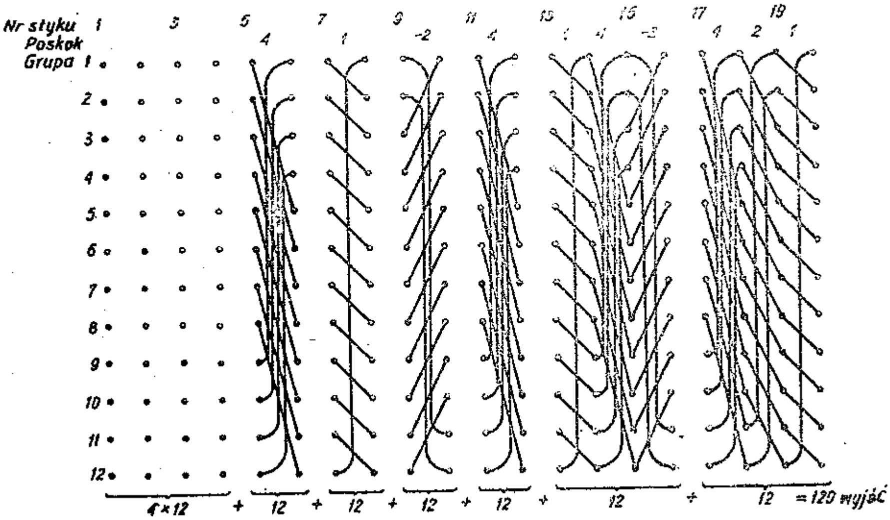
Rys. 2. Zwielokrotnienie stopniowane D=10, N=27



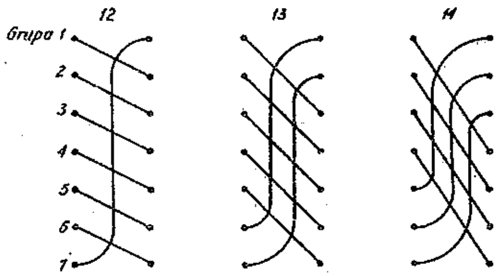
Rys. 3. Zwielokrotnienie standardowe D=10; g=13; N=13



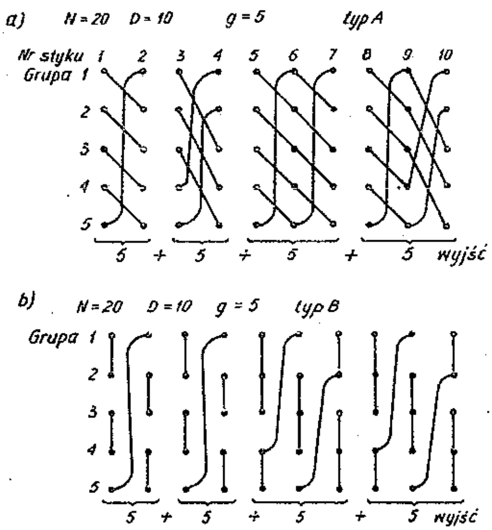
Rys. 4. Zwielokrotnienie standardowe D=10; g=13; N=65



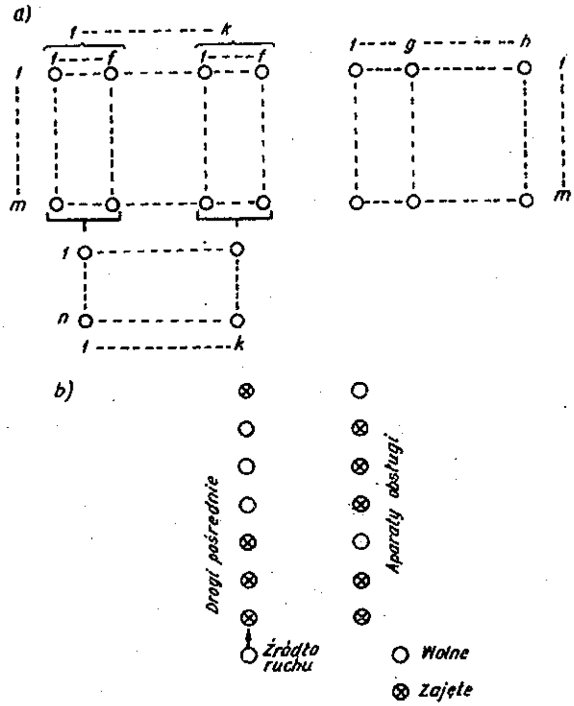
Rys. 5. Zwielokrotnienie standardowe D=20; g=12; N=120



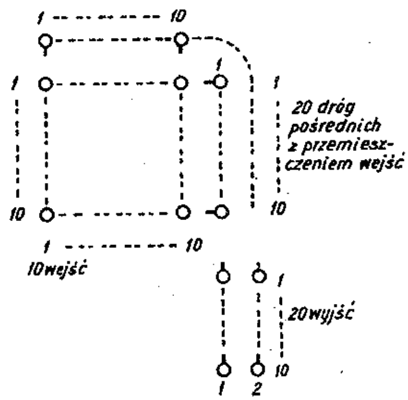
Rys. 6. Zwielokrotnienia skośne g=7, 12, 13, 14



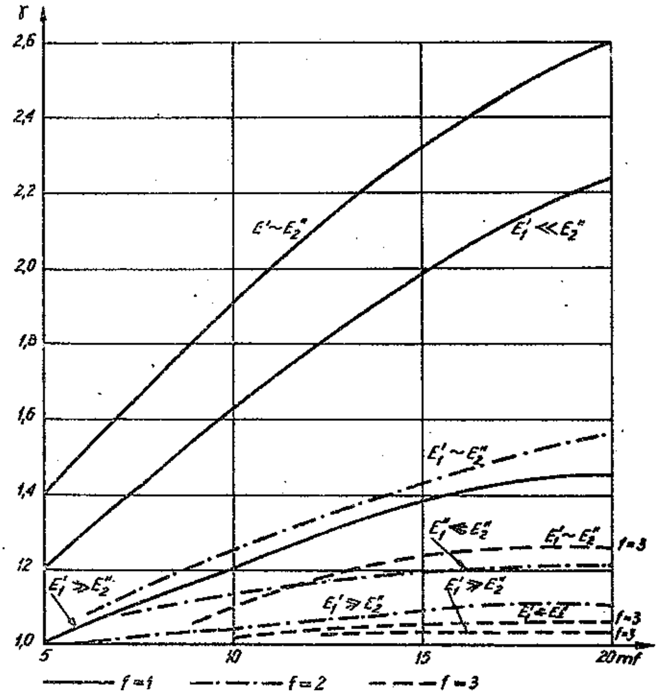
Rys. 7. Zwielokrotnienie homogeniczne skośne /typu A/ i uproszczone /typu B/



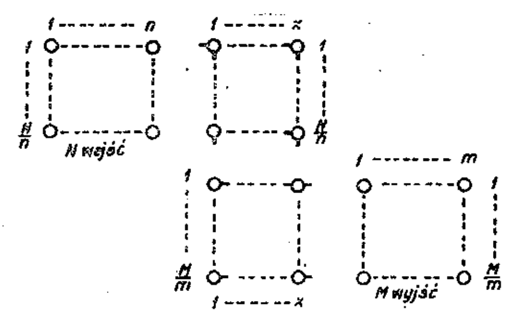
Rys. 8. Zasada układu dwusekcyjnego



Rys. 9. Przykład przemieszczenia prostokątnego



Rys. 10. γ =f /m; f/ według NIITS



Rys. 11. Układ trzysekcyjny bez blokady wewnętrznej