1968
Nr 30

INSTYTUT ŁĄCZNOŚCI
WARSZAWA — MIEDZESZYN

PROBLEMY ŁĄCZNOŚCI

PŁ

MINISTERSTWO ŁĄCZNOŚCI

PROBLEMY ŁĄCZNOŚCI

ROK 8 WARSZAWA 1968 NR 30

INSTYTUT ŁĄCZNOŚCI

Branżowy Ośrodek
Informacji Naukowo-Technicznej i Ekonomicznej

Adres Redakcji:
Instytut Łączności
Branżowy Ośrodek
Informacji Naukowo-Technicznej i Ekonomicznej
Warszawa-Miedzeszyn, ul. Szachowa 1

Redaktor: J. Borkowska Montaż tekstu: B. Drabik

Dział Wydawniczy Instytutu Łączności
Format B5. Nakład 700. Druk ukończono
w październiku 1968 r.

P R O B L E M Y   Ł Ą C Z N O Ś C I

SPIS TREŚCI

Andrzej Gałoch

KRYTERIA ALOKACJI SIŁ WYTWÓRCZYCH W DZIEDZINIE ŁĄCZNOŚCI

/PROBLEM OPTYMALIZACJI STRUKTUR INWESTYCYJNO-PRODUKCYJNYCH/

1. WSTĘP

Rozwojowi gospodarki narodowej towarzyszą nieustannie zmiany zarówno struktury jak i wielkości zapotrzebowania na usługi wszelkiego rodzaju, w tym i na usługi łączności. W odniesieniu do tych ostatnich należy szczególnie podkreślić ścisłą współzależność ich rozwoju ze wzrostem całej gospodarki narodowej. Wiąże się to ze specyficzną rolą, jaką dziedzina łączności odgrywa niewątpliwie w działalności gospodarczej /i nie tylko gospodarczej/ społeczeństwa. Tempo jej rozwoju powinno być zatem odpowiednio dostosowane do ogólnogospodarczej stopy wzrostu, przy równoczesnym dążeniu do możliwie najlepszego wykorzystania dysponowanych przez nią mocy i zasobów produkcyjnych /zarówno rzeczowych, jak i osobowych/.

W dążeniu do optymalizacji rozwoju łączności należy wyjaśnić przede wszystkim dwa aspekty:

- bieżący - optymalizacji struktury produkcyjnej od strony przydziału zadań i mocy produkcyjnych oraz długofalowy, perspektywiczny - optymalizacji struktury inwestycyjnej, tj. przydziału rzeczowych i finansowych środków oraz siły roboczej.

Idące w ślad za tym opracowanie metod dynamizowania i dostosowywania struktury wytwarzanych i świadczonych usług do zmiennych potrzeb gospodarki i społeczeństwa staje się najistotniejszym zagadnieniem, jakie należałoby rozwiązać w ramach łączności.

Jak wspomniano wyżej, łączność jest specyficzną dziedziną produkcji materialnej, gdyż dobra, jakie wytwarza - usługi - są niezbędne dla niezakłóconego przebiegu procesów gospodarczych i działań administracyjnych. Z tej racji przyjmowane dotychczas z reguły założenie proporcjonalności tempa wzrostu usług łączności oraz całej gospodarki narodowej powinno być zastąpione przez postulat szybszego rozwoju tych usług w porównaniu z resztą gospodarki. Jest to szczególnie słuszne z uwagi na występujący w naszym kraju względny niedorozwój wszystkich działów łączności oraz potrzebę stymulowania przez nią, a nie wręcz hamowania procesów gospodarczych [1/].

Tezy powyższe w pełni usprawiedliwiają tendencję do zdecydowanego popierania rozwoju i doskonalenia narzędzi planowania gospodarczego, jaka zaistniała w ostatnim okresie w obrębie samej łączności. W konsekwencji prowadzi to do systematycznego zastępowania tradycyjnych

---

[1/] Z. Rafałowicz - "Planowanie perspektywicznego rozwoju telefonii". WKiŁ, Warszawa 1963, s. 10.

metod planowania "bilansowego" przez nowoczesne metody z zakresu ekonometrycznej teorii programowania procesów gospodarczych.

Łączność jest przykładem wyodrębnionej dziedziny gospodarczej, w której rachunek ekonomiczny prowadzony przy wykorzystaniu wyżej wspomnianych metod może okazać się pomocny w wyborze i podejmowaniu decyzji dotyczących wielkości gospodarczych występujących wewnątrz tej dziedziny. Na podstawie takiego rachunku nie można bezpośrednio decydować o pewnych "zewnętrznych" wielkościach /jak np. o przydzielanym przez władze centralne funduszu inwestycyjnym/ lecz nie należy negować faktu, że jego rezultaty mogą mieć pośredni wpływ na kształtowanie się przyszłych decyzji szczebla centralnego, a dotyczących łączności.

Niniejszy artykuł ma stanowić pewien przyczynek do problematyki teorii programowania gospodarczego, przy czym uwypuklono w nim szczególnie ważny element składowy modeli programowania optymalizacyjnego, tzw. funkcje-kryteria, z równoczesną adaptacją ich do specyficznych warunków łączności.

2. ZARYS TEORII PROGRAMOWANIA

2.1. Wprowadzenie

Teoria programowania współzależnych działań jest jedną z trzech podstawowych dziedzin ekonometrycznych /obok analizy procesów rynkowych oraz zagadnień prognoz koniunkturalnych/. W swej istocie odpowiada ona zagadnieniom planowania gospodarczego, ujmując je w formę matematycznych modeli. Dotychczas panujące przekonanie, że przedmiotem analizy tej dziedziny nauki są jedynie wielkości mikroekonomiczne występujące na szczeblu przedsiębiorstw nie wydaje się być słuszne, gdyż analizie ekonometrycznej poddawane są obecnie nie tylko gałęzie gospodarki narodowej, ale ostatnio tworzy się nawet modele całej gospodarki.

W obrębie samej teorii programowania można wyodrębnić dwie zasadnicze części. Pierwsza z nich bada zagadnienia wewnętrznej zgodności programów gospodarczych, tj. "zagadnienia koordynacji poszczególnych wzajemnie od siebie zależnych decyzji",[1/] niezbędnej dla realizacji określonego programu, druga zaś część obejmuje "zagadnienia optymalności programów"[1/], tzn. zajmuje się problematyką i metodologią wyboru najlepszych /optymalnych/ programów spośród wszystkich możliwych i dopuszczalnych z uwagi na przyjęte założenia i warunki.

Poniżej omówiono szczegółowiej obie te części.

2.2. Zagadnienia wewnętrznej zgodności

W swym metodologicznym aspekcie pierwsza z dwu części teorii programowania jest w zasadzie rozwinięciem i unowocześnieniem tradycyjnej metody bilansowej. Utożsamia się ją zwykle z tzw. analizą /lub metodą/ przepływów mię-

---

[1/] O. Lange - Wstęp do ekonometrii. PWN 1967, wyd. 4, s. 191.

dzydziałowych czy międzygałęziowych /"input - output analysis"/.

W łączności, podobnie jak w odniesieniu do innych działów gospodarki narodowej, zastosowanie modelu przepływów międzydziałowych prowadzi do wyrażenia realnych wewnętrznych powiązań pomiędzy poszczególnymi służbami tej dziedziny w matematycznej postaci układu równań bilansowych produkcji bądź równań kosztów. Odzwierciedlają one fizyczny lub wartościowy aspekt poszczególnych procesów wytwarzania usług łączności różnego rodzaju. W postaci modelu matematycznego zostaje ujęta struktura nie tylko wzajemnych przepływów usług pomiędzy poszczególnymi służbami łączności, ale także usługi świadczone na zewnątrz, dla reszty gospodarki i społeczeństwa /indywidualna konsumpcja usług/; te ostatnie w formie tzw. "produktów końcowych". W modelu wykorzystuje się rachunek macierzowy.

Zagadnienie proporcjonalnego rozwoju usług łączności zgodnego równocześnie z ogólnogospodarczymi preferencjami - złożone i trudne do rozwiązania z uwagi na zjawisko nieustannie zachodzącego postępu technicznego, który prowadzi do zmian i dynamizacji struktury technicznej produkcji - jest samo w sobie ważnym, jeżeli nie podstawowym kryterium alokacyjnym /jakie pozostaje zresztą do rozwiązania nie tylko w łączności/.

Metoda przepływów międzygałęziowych - jak ją prezentujemy poniżej - w połączeniu z elektroniczną techniką obliczeniową daje gwarancję szybkiego a zarazem pełnego uchwycenia wewnętrznej struktury łączności w całokształcie jej powiązań, stwarzając przy tym czytelny jej obraz.

Założenia modelowe[1/]

1. Stosownie do potrzeb naszej analizy wydzielimy odrębne służby i działy łączności, kierując się przy tym głównie rodzajem wytwarzanych usług oraz względną integralnością procesów ich wytwarzania. Mając cały czas świadomość arbitralności i dyskusyjności takiego podziału zakładamy, że zawężając płaszczyznę analizy do organizacyjnych ram Państwowego Przedsiębiorstwa "Polska Poczta Telefon i Telegraf" możemy wyodrębnić następujące służby /działy/ rozważanej przez nas dziedziny:

1/ poczta,

2/ telefonia miejscowa,

3/ telefonia międzymiastowa i okręgowa,

4/ telegrafia,

5/ telegrafia abonencka /teleks/,

6/ radiofonia przewodowa.

2. Z uwagi na dużą różnorodność usług, nawet w obrębie poszczególnych służb /działów/ łączności oraz towarzyszącą jej niejednorodność fizycznych jednostek miary, nasze rozważania zostaną przeprowadzone wyłącznie w aspekcie wartościowym.

[1/] Należy podkreślić, że próbą /jakkolwiek statyczną/ zastosowania metody input-output na gruncie łączności jest niepublikowana praca Alfreda Osmyckiego i Jana Żurkowskiego z Komisji Planowania przy Radzie Ministrów pt. "Zastosowanie analizy input-output do prognozy rozwoju perspektywicznego łączności w latach 1966-1985 ze szczególnym uwzględnieniem potrzeb inwestycyjnych w poszczególnych pięcioleciach" /maszynopis s.16, plus 3 zestawienia/.

3. Analiza ograniczona jest określonym przedziałem czasowym, a za jednostkę podstawową przyjęto rok.

4. W związku z założeniem nr 2 poszczególne kategorie ekonomiczne wchodzące w zakres naszej analizy - w rodzaju nakładów i akumulacji jednostkowej - będą interpretowane jako wielkości przypadające nie na fizyczną jednostkę dowolnej usługi, lecz na jednostkę wartościową /dosłownie na jeden zł usługi/.

Model matematyczny

Niech poniższe symbole oznaczają odpowiednio:

X_i - wartość globalną wytworzonych w i-tym dziale usług w określonym roku; i = 1,2,...,6, przy czym subskrypty oznaczają kolejne działy wymienione w założeniu nr 1,

x_{ij} - wartość przepływów międzydziałowych, gdzie i = jw /wyrażenie x_{ii} , i = j/ oznacza wówczas wartość usług zużywanych przez dział ich wytwarzania/,

x_i - wartość usług wchodzących w skład produktu końcowego, czyli usług świadczonych przez i-ty dział /służbę/ łączności na rzecz pozostałych gałęzi gospodarki narodowej bądź na konsumpcję indywidualną.

$a'_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$ /i,j = 1,2,...,6/ - współczynnik nakładów[1/], czyli wartościowo ujęta norma świadczenia usługi i-tego działu na jeden zł usługi dowolnego z działów pozostałych.

Uwzględniając wówczas łącznie powyższe elementy otrzymujemy następujący układ bilansowych równań produkcji usług:

$$
\begin{array}{l}
(1-a'_{11})X_1 - a'_{12}X_2 - \dots - a'_{16}X_6 = x_1 \\
-a'_{21}X_1 + (1-a'_{22})X_2 - \dots - a'_{26}X_6 = x_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-a'_{61}X_1 - a'_{62}X_2 - \dots\dots + (1-a'_{66})X_6 = x_6
\end{array}
\qquad /1/
$$

Jak widzimy, ujęto tu w formę równań liniowych związki zachodzące pomiędzy produktami końcowymi poszczególnych działów x_i a produktami brutto X_j tych działów, uwzględniając równocześnie wewnętrzną strukturę nakładów całej gałęzi. Zagregowana macierzowa postać powyższego układu daje się przedstawić następująco:

$$(I-A')\,X = x \qquad /2/$$

gdzie:

[1/] O. Lange - Wstęp do ekonometrii. PWN 1967, wyd. 4, str. 191.

$/I-A'/$ - macierz struktury nakładów utworzona ze współczynników stojących przy wyrażeniach X_j z układu równań /1/,

$$X \text{ - wektor pionowy produktów brutto } = \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{Vmatrix}$$

$$x \text{ - wektor pionowy produktów końcowych } = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_6 \end{Vmatrix}$$

Wyrażenie /2/ odzwierciedla związek pomiędzy zaplanowanym poziomem produktów końcowych a niezbędnymi dla osiągnięcia tego poziomu wielkościami produktów brutto, biorąc pod uwagę aktualną strukturę nakładów jednostkowych.

Podobnie poprawna jest odwrócona postać tego wyrażenia, która uzależnia z kolei poziom planowych wielkości produktów brutto od społecznego zapotrzebowania na usługi łączności /czyli od produktów końcowych/:

$$/I-A'/^{-1}x = X, \qquad /2a/$$

gdzie wyrażenie $/I-A'/^{-1}$ jest macierzą odwróconą względem macierzy pierwotnej.

Należałoby wreszcie nadmienić o możliwości wykorzystania przedstawionych wyżej formuł /2/ oraz /2a/ dla badań nad wielkością i strukturą niezbędnych nakładów inwestycyjnych /a także poziomu zatrudnienia przyrostowego/ warunkujących dalszy rozwój łączności z równoczesną ekstrapolacją struktury wewnętrznej tej dziedziny. Mamy wówczas dwie możliwe drogi postępowania:

W pierwszym przypadku można założyć niezmienność tej struktury, tzn. macierzy struktury nakładów A' w czasie. Oznacza to innymi słowy zachowanie tych samych proporcji pomiędzy poszczególnymi działami /służbami/ łączności, nawet w wypadku wzrastającej skali produkcji usług, co w gruncie rzeczy oznaczałoby pominięcie zarówno wpływu postępu technicznego na tą strukturę, jak i zmian oraz przesunięć w społecznym zapotrzebowaniu na te usługi /w efektywnym popycie na nie/. Całość zagadnienia sprowadzi się wówczas do odpowiedniego oszacowania poziomu współczynników kapitałochłonności i pracochłonności przyrostowej oraz wykorzystania ich do wyliczenia niezbędnych globalnych nakładów inwestycyjnych i zatrudnienia przy danych założeniach co do przyrostu bądź produktów brutto, bądź produktów końcowych. W rachunku takim należy się posłużyć odpowiednio zmodyfikowanymi wyrażeniami typu /1/, /2/ lub /2a/. Oczywiście problemem samym w sobie jest właściwy szacunek współczynników kapitałochłonności i pracochłonności.

Druga możliwość prowadzi do zdynamizowania ujęcia pierwszego typu przez uwzględnienie czynnika czasu zarówno w stosunku do wspomnianych wyżej współczynników kapitało- i pracochłonności, jak również w odniesieniu do współczynników struktury działowej /λ_i/, a także przy określaniu zmian w efektywnym popycie na usługi łączności. Zgodnie z rzeczywistością struktura produkcyjna nie jest konstrukcją statyczną, lecz ulega ciągłym przeobrażeniom. Rozwój gałęzi nie może być utożsamiany ze zmianami ilościowymi, ponieważ przy obecnym tempie przemian technicznych zachowanie statycznego charakteru produkcji usług byłoby przedsięwzięciem niesprawnym z ekonomicznego punktu widzenia. Stwarzałoby to na przyszłość hamulce rozwoju gałęzi jako całości. Jedynymi wielkościami parametrycznymi byłyby wówczas zaplanowane na skutek decyzji państwowych pułapy produkcyjne dla poszczególnych działów /służb/ łączności. Ponieważ jednak preferencje państwa idą zazwyczaj po linii interesów i potrzeb ogólnogospodarczych, są więc one częścią składową ogólnospołecznego popytu na usługi łączności.

Uwzględnienie dynamiki poszczególnych interesujących nas wielkości gospodarczych oraz współczynników jest rzeczą trudną i powinno być przedmiotem odrębnej analizy. Można jedynie sądzić, że pomocne w budowaniu odpowiednich zależności funkcyjnych mogą się okazać metody z zakresu rachunku korelacyjnego i teorii trendów, zaś rachunek prawdopodobieństwa może zapewnić narzędzia estymacji wiarogodności wyników w ten sposób otrzymanych. Należałoby też uwzględnić niezwykle ważną ekonometryczną analizę popytu na usługi łączności w funkcji opłat za te usługi /taryf/, dochodów indywidualnych i innych podobnych czynników.

Jeżeli więc:

J_t – oznacza przydzielony łączności fundusz inwestycyjny w roku t,

ΔZ – przewidywany przyrost zatrudnienia wyrażony w przydzielonym funduszu zatrudnienia,

$/I-\Delta A'/_t$ – zdynamizowaną postać macierzy struktury nakładów, przy czym $\Delta A'_t \neq A'$,

m_t, l_t – wektory poziome współczynników kapitało- i pracochłonności w funkcji czasu,

Δx_t – pionowy wektor przyrostowy produktów końcowych,

ΔX_t – pionowy wektor przyrostowy produktów brutto,

wówczas zmodyfikowany nieco problem można ująć następująco:

Jaki poziom osiągną w poszczególnych działach przyrostowe produkty końcowe bądź produkty brutto przy założonych lub danych funduszach inwestycji i zatrudnienia przyrostowego?

Otrzymujemy następujące rozwiązanie formalne:

1/ przy danym funduszu inwestycji przyrost produktu brutto wyniesie:

$$\Delta \bar{X}_t = /I-\Delta A'/_t \bar{m}_t^{-1} J,$$

a przyrost produktu końcowego:

$$\Delta x_t = /I-\Delta A'/_t m_t^{-1} J;$$

2/ przy danym funduszu zatrudnienia przyrostowego produkt brutto wzrośnie o:

$$\Delta X_t = /I - \Delta A'/^{-1}_t\, l_t^{-1} \Delta Z,$$

a produkt końcowy:

$$\Delta x_t = /I - \Delta A'/_t\, l_t^{-1} \Delta Z$$

Oczywiście wiążące będą poziomy najniższe dla obydwu funduszy łącznie /problem "wąskiego gardła"/.

Optymalizacja struktury produkcyjnej całej gałęzi /łączności/ polega przede wszystkim na sharmonizowaniu zdolności produkcyjnych poszczególnych części składowych /działów - służb/ przez odpowiedni wybór procesów technologicznych oraz właściwych proporcji międzydziałowych. Przedstawiona wyżej analiza zakłada spełnienie swoistego kryterium wewnętrznej zgodności i zbilansowania poszczególnych elementów składowych gospodarki łączności zarówno w statyce, jak i w dynamice. Warto jednak zauważyć, że spełnienie tego kryterium zachodzi przy teoretycznie równej nieskończoności ilości wariantów możliwych, a praktycznie - niezwykle dużej ilości wariantów dopuszczalnych, z uwagi na przyjęcie pewnych założeń z góry eliminujących warianty niesprawne z naszego punktu widzenia /np. bez wahania i zbędnych obliczeń odrzucimy wszelkie rozwiązania eliminujące produkcję niektórych służb łączności ze względu na ewentualną ich deficytowość, jak to ma miejsce w przypadku niektórych usług np. pocztowych[1]. W takim wypadku nie można bezpośrednio ocenić praktycznej przydatności tego lub innego wariantu. Z pomocą przychodzi nam wówczas programowanie optymalizacyjne.

2.3. Zagadnienia optymalizacji programów

Z badań nad wewnętrzną zgodnością ustaliliśmy charakter zależności wewnątrzgałęziowych z wykorzystaniem do tego celu rachunku macierzowego.

Z kolei przystąpimy do omówienia zagadnień wyboru programów najlepszych. Zagadnienie programowania optymalizacyjnego sprowadza się więc do wyboru określonej postacji funkcji-kryterium, odzwierciedlającej nam w formalnym związku określony cel gospodarczy, który zamierzamy zrealizować. Przy uwzględnieniu określonego zestawu założeń i ograniczeń staramy się nadać przyjętej funkcji wartość maksymalną bądź minimalną - odpowiednio do postawionego celu.

Mamy więc:

1/ funkcję kryterium $f/X/ \longrightarrow$ maksimum ew. minimum, gdzie X jest zbiorem zmiennych decyzyjnych danego programu,

---

[1] Takie podejście jest zrozumiałe, ponieważ kierujemy się tu nie racjonalnymi przesłankami wyboru wariantów bezwzględnie rentownych, lecz preferencjami ogólnospołecznymi i potrzebą zapewnienia zrównoważonego rozwoju całego układu łączności, a to wymaga m.in. utrzymania, a nawet rozszerzenia skali produkcji usług pocztowych.

2/ ograniczenia bilansowe typu:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_i \gtreqless b_i$$

gdzie lewa strona jest znanym nam układem równań typu bilansowego, a wyrażenie b_i jest pewną wielkością limitującą[1/],

3/ ograniczenia brzegowe typu:

$$X_i \geqslant 0 \quad \text{lub} \quad 0 \leqslant X_i \leqslant c_i \quad \text{albo} \quad X_i \geqslant c_i,$$

które odzwierciedlają w pierwszym przypadku oczywiste założenie, że produkcja jakiegokolwiek z działów nie może być wielkością ujemną; w dalszych zaś uściślają rozmiary postulowanej produkcji niektórych usług /czy działów - służb/.

Obok zmiennych decyzyjnych X_i występują zatem w modelu parametry różnego rodzaju /ekonomiczne, technologiczne/.

Wśród rozwiązań dopuszczalnych zdeterminowanych przez ograniczenia /2/ lub /3/ znajduje się rozwiązanie optymalne z uwagi na określony charakter przyjętej funkcji-

---

[1/] Założenia te wynikają z konieczności zachowania zawsze ważnego warunku wewnętrznej zgodności układu /programu/. Ograniczają one z reguły stopień swobody programu, zawężając możliwości rozwiązań do obszaru rozwiązań dopuszczalnych.

-kryterium, która określona jest przez cele gospodarcze, jakie stawiamy przed daną dziedziną.

Również w przypadku łączności najogólniejszym i najważniejszym celem jest maksymalna w stosunku do potrzeb społeczeństwa i gospodarki produkcja usług o określonej ich strukturze. Można jednakże przyjąć i inne kryterium, np. rentowność ew. poziom kosztów produkcji czy inwestycji. Charakter funkcji-kryterium i jej postać zależy oczywiście od natury związków zachodzących pomiędzy interesującymi nas w obrębie łączności wielkościami ekonomicznymi. One też determinują poszczególne rodzaje modeli programowania optymalizacyjnego: liniowe, nieliniowe, dynamiczne oraz ich probabilistyczne odmiany. Rozpatrzmy zatem pokrótce te modele.

Model programowania liniowego

W modelu tym należy wyznaczyć n zmiennych decyzyjnych X_i /i = 1,2,...,n/ wyrażających np. wielkość produkcji poszczególnych działów, rozmiary akumulacji lub kosztów przy posiadaniu zestawu wielkości determinujących /współczynniki nakładów jednostkowych, kapitało- i pracochłonności, stawki taryfowe itp/. Zarówno dane jak i planowane wielkości zmiennych decyzyjnych powiązane są pewnymi zależnościami liniowymi. Zmienne decyzyjne powinny być tak dobrane, aby określona postać liniowa funkcji-kryterium przyjęła wartości ekstremalne /maksimum albo minimum/. Występująca praktycznie duża ilość zmiennych programu liniowego wskazuje na konieczność korzystania z maszyn cyfrowych do rozwiązywania algorytmów. Jest to warunek opłacalności stosowania tej metody z uwagi na jej czaso- i pracochłonność w przypadku próby rozwiązywania ręcznego.

Należy też zaznaczyć, że programy liniowe są z zasady zbyt grubą aproksymacją rzeczywistych procesów gospodarczych, ponieważ bardzo rzadkie są przypadki występowania w praktyce gospodarczej zależności liniowych. Stąd też zrozumiała jest tendencja do przechodzenia w miarę rozwoju nauki ekonometrii do technik i programów nieliniowych, które nie są obciążone takim błędem /tzn. zbyt dużym uproszczeniem/.

Programowanie nieliniowe - wersja kwadratowa

Jak sama nazwa wskazuje, mamy tu do czynienia z przypadkiem, w którym wszystkie zależności modelowe - albo niektóre z nich - występują w postaci związków nieliniowych.

Ograniczymy się w tym przypadku do omówienia szczególnej postaci programowania omawianego typu, tj. do programowania kwadratowego, ponieważ dla celów praktyki gospodarczej dostarcza ono dostatecznej aproksymacji poszczególnych realnych zależności.

W modelu programowania kwadratowego, którego schemat nie różni się zasadniczo od poprzednio omówionego modelu liniowego, w postaci zależności kwadratowych występują albo zależności bilansowe, albo funkcja-kryterium, bądź też obydwa te elementy łącznie.

Pozostawiając do dalszych rozważań prezentację konkretnych rozwiązań kwadratowej funkcji celu wyjaśnimy krótko istotę korzyści płynących z zastosowania programowania tego typu.

Postęp techniczny oraz nieustanne zmiany warunków rynkowych /głównie od strony efektywnego popytu/ wpływają zasadniczo zarówno na poziom kosztów, wielkość produkcji, rozmiary zysku, jak też i na charakter wymienionych wielkości, a dokładnie - ich zmian. Z uwagi na wymienione wyżej obydwa zjawiska mamy do czynienia z nieproporcjonalnym wzrostem poszczególnych elementów składowych kategorii kosztów i zysku, a zatem i samych tych kategorii. Nieproporcjonalność tę udaje się uchwycić właśnie przez wykorzystanie kwadratowej postaci poszczególnych kryteriów.

Programowanie dynamiczne

Podobnie jak wyżej, w przypadku programowania dynamicznego, ograniczymy się wyłącznie do opisu werbalnego, pozostawiając omówienie szczegółów przy okazji dyskusji nad postaciami funkcji-kryteriów. Można tu jedynie stwierdzić, że ten typ programowania pozwala wyznaczać optymalne decyzje niezależnie od charakteru parametrów i zależności funkcyjnych zagadnienia. Jeżeli np. do procesu alokacji podejdziemy w sposób "zdynamizowany", tzn. nadamy mu własność pozornie czasową /kolejno "w czasie" rozdzielamy zasoby pomiędzy poszczególne przeznaczenia/, wówczas mamy do czynienia z klasyczną postacią programowania dynamicznego.

Programowanie probabilistyczne

Każdemu z trzech wyżej omawianych typów modeli programowania optymalizacyjnego można nadać charakter probabilistyczny. Ogólnie ten rodzaj programowania obejmujemy określeniem programowania w warunkach niepewności. Poszczególne elementy modelu, zawierające się zarówno w funkcji-kryterium jak i w ograniczeniach, mają charakter zmiennych losowych, przy czym zakłada się znajomość ich rozkładów prawdopodobieństwa. W odniesieniu do alokacji czynników produkcji można by ten typ modelowy przedstawić jak poniżej.

Należy ustalić optymalną wielkość mocy produkcyjnych w poszczególnych służbach łączności, która zapewniłaby zaspokojenie popytu na wytwarzane przez nie usługi, przy możliwie najniższych łącznych kosztach ich świadczenia. Przyszłe zapotrzebowanie w momencie t jest wektorem zmiennych losowych. Oznacza to, że prawdopodobieństwo, iż zapotrzebowanie na dowolną usługę będzie mniejsze lub równe wielkości x_i określa pewna funkcja φ /x/. Jest ona dystrybuantą rozważanej zmiennej, czyli funkcją charakteryzującą rozkład prawdopodobieństwa przyjmowania przez tę zmienną określonych wartości.

Na bazie powyższego zagadnienia, jak i podobnych, nie trudno zauważyć, że metody probabilistyczne mają ograniczone zastosowanie. Wymagają one bowiem nie tylko znajomości bezpośredniej albo szacunkowej rozkładu prawdopodobieństwa /postaci dystrybuanty/ programowanych wielkości, ale ponadto /a może właśnie dlatego/ nadają się do zastosowania jedynie w odniesieniu do decyzji powtarzalnych. Większość zaś decyzji typu przydziału /charakterystycznych dla planowania gospodarczego/ ma charakter jednorazowy /np. decyzje inwestycyjne/ i probabilistyczne prawo wielkich liczb nie ma w stosunku do nich zastosowania /czyli trudno w takich przypadkach szacować elementy losowe/.

2.4. Specyfika produkcji łączności

W kolejnym dziale niniejszego artykułu omówimy kilka postaci funkcyjnych, które proponuje się przyjąć za ewentualne kryteria alokacji w obrębie łączności /mając cały czas na uwadze specyfikę produkcji tej dziedziny, stawiającą pod znakiem zapytania możliwość praktycznego zastosowania pewnych modeli optymalizacyjnych/. Sprowadza się ono do dwu zasadniczych grup problemów:

1. Produkt łączności - usługi są bezzwłocznie konsumowane po wytworzeniu lub też obydwa te akty są nierozdzielne w czasie. Innymi słowy - nie ma luki czasowej pomiędzy wytworzeniem pewnych usług a ich świadczeniem /rozmowa telefoniczna jest np. "konsumowana" na bieżąco/. Wartość usług łączności może być uwzględniona w rachunku wyłącznie z chwilą nabycia ich przez klienta. Z tego wynika - jako nieodłączny - problem stopnia odpowiedniego zabezpieczenia mocy produkcyjnych łączności zarówno od strony wielkości jak też struktury z równoczesnym dostosowaniem ich do efektywnego zapotrzebowania. Należy równocześnie uwzględnić koszty ponoszone za-

równo z tytułu niewykorzystania tych mocy, jak i straty wynikłe z niemożności świadczenia usług określonego rodzaju na skutek ich niedoboru /zajętość na skutek braku mocy lub po prostu brak określonych urządzeń/.

2. Obok problemu sprzężenia typu: moc produkcyjna łączności - zapotrzebowanie, wyrażające się bieżąco w efektywnym popycie, mamy do czynienia ze specyficznymi problemami technicznymi. Krótko mówiąc są to zagadnienia nierozdzielności bazy produkcyjnej poszczególnych służb /szczególnie w obrębie telekomunikacji/ oraz łącznego partycypowania szeregu ogniw łączności w świadczeniu jednej i tej samej usługi. Wynikają stąd olbrzymie trudności wyodrębnienia niezbędnych z punktu widzenia modeli optymalizacyjnych elementów rachunku kosztów, dochodu czy akumulacji. Należałoby w takim przypadku szukać wyjścia przez zastosowanie arbitralnego rozbicia poszczególnych łącznych wielkości wspomnianych wyżej kategorii ekonomicznych albo też przez maksymalnie możliwe zagregowanie rachunku optymalizacyjnego. Problem większej lub mniejszej poprawności obydwu ujęć pozostaje sprawą do dyskusji.

3. KRYTERIA ALOKACJI SIŁ WYTWORCZYCH W ŁĄCZNOŚCI

3.1. Wprowadzenie

Przyjmujemy następujący sposób prezentacji kryteriów:

1. Wyodrębniamy kryteria ogólne, dające się zastosować dla całej łączności, mimo specyfiki i odrębności pewnych jej służb.

2. Specyficzne a zarazem ważne zagadnienie niezawodności urządzeń, stojące głównie przed działami telekomunikacji, ujmujemy w formie kryterium odcinkowego.

3. Problem alokacji rozpatrujemy dwoma odrębnymi sposobami:

- pośrednio, drogą budowania modeli optymalizujących strukturę bieżącą produkcji w założonym momencie t, a następnie nakładania na tę strukturę siatki inwestycji i zatrudnienia przyrostowego z uwzględnieniem zmian w warunkach technicznych i wydajności pracy za cały okres zamrożenia nakładów[1/];

- bezpośrednio, przez budowanie modelu alokacji samych funduszy inwestycji i zatrudnienia w obrębie poszczególnych służb.

3.2. Kryteria ogólne

Zarówno w przypadku bieżącego rozdziału zadań produkcyjnych jak i przydziału funduszu inwestycji oraz zatrudnienia można by uwzględnić trzy zasadnicze kryteria:wielkość przewidywanej produkcji usług, poziom kosztów oraz rentowność.

[1/] Powyższe ujęcie wydaje się być poprawne, przy ustalaniu bowiem programów inwestycyjnych kierujemy się zawsze pewnymi informacjami dostarczanymi przez bieżący proces wytwarzania, które wskazują na "korzystne" lokaty funduszy przy spełnieniu określonych założeń rozwojowych.

Optymalizacja struktury produkcji

1. Kryterium wielkości produkcji usług

Dostosowanie wielkości i struktury wytwarzanych usług do zmiennych potrzeb społeczeństwa i gospodarki narodowej jest zagadnieniem pierwszoplanowym. Kryterium optymalizacji produkcji usług łączności uwzględniające preferencje ogólnogospodarcze jest zgodne z podstawowym założeniem gospodarki socjalistycznej - maksymalnym zaspokojeniem potrzeb społeczeństwa.

Za najlepsze rozwiązanie produkcyjne przyjmiemy takie ustawienie struktury wytwarzania usług /pośrednio - mocy produkcyjnych/, które maksymalizuje produkcję brutto łączności /ew. - ważniejszą z punktu widzenia konsumenta - produkcję końcową/.

Gdy symbolem P oznaczymy taki wektor taryf obowiązujących w poszczególnych działach łączności, że jego składowe P_i są z kolei wektorami o n wierszach /n odpowiada dowolnej liczbie taryf obowiązujących w obrębie każdego działu-służby z osobna/, czyli $P = P_{i/n/}$, $i = 1,2,\ldots,6$;

n - dowolnie duża liczba,

Q - oznacza macierz quasi-diagonalną produkcji usług w wyrażeniu fizycznym, której elementy są równe na przekątnej wyrażeniom typu $Q_{i/n/}$,

X - oznacza podobną macierz produkcji w wyrażeniu wartościowym, wtedy funkcja produkcji przyjmie następującą postać:

$$F/X/ = \sum_{i=1}^{6} X_i = \sum_{i=1}^{6} \sum^{n} P_{i/n/} Q_{i/n/};\ i,\ n - jw$$

Powyższe wyrażenie liniowe należy maksymalizować.

2. K r y t e r i u m   r e n t o w n o ś c i   p r o d u k c j i

a/ wstępna forma liniowa

Przy parametrycznym charakterze opłat i taryf łączności oraz przy szacunkowo ustalonych jednostkowych kosztach wytwarzania usług[1/] jesteśmy w stanie obliczyć akumulację jednostkową[2/].

Zakładając - zgodnie ze stanem faktycznym - niską na ogół elastyczność popytu na usługi łączności, z uwagi na ciągłe niezaspokojenie potrzeb gospodarki narodowej w zakresie tychże usług /szczególnie telekomunikacyjnych/ oraz uwzględniając stałość taryf łączności we względnie długim okresie czasu, możemy w rozważaniach modelowych wziąć pod uwagę jedynie zmienność struktury i techniki wytwarzania jako pochodną postępu technicznego. Jedynie te elementy mogą bowiem determinować zmiany w jednostkowych nakładach na poszczególne rodzaje usług, a tym

---

1/ Koszt jednostkowy usług rozumiemy jako średni nakład na jeden złoty usługi.

2/ Liczoną analogicznie na jeden zł wartości usługi.

samym i poziom jednostkowej akumulacji. Należy przy tym zaznaczyć, że kryterium akumulacji zastępuje nam nieadekwatne dla warunków gospodarki socjalistycznej kryterium zysku, które zakłada wpływ zjawisk rynkowych /głównie zmienności cen/ na poziom kosztów.

W przypadku funkcji liniowej każdy wzrost świadczenia usług wyrażony wartościowo wpływa na przyrost akumulacji o wielkość np. m_j /j = 1,2,...,6/. Zakładając znajomość charakteru i poziomu kosztów produkcji, a zatem i akumulacji będącej różnicą pomiędzy globalną wartością wytwarzanych usług a kosztami ich wytwarzania /w wyrażeniu jednostkowym dla dowolnej j-tej usługi lub służby wyliczymy ją jako różnicę pomiędzy 1 zł utargu a kosztem wytworzenia tego złotego usługi/ dochodzimy do poniższej postaci funkcji-kryterium:

$$M = \sum_{j=1}^{6} /X_j - X_j k_j/ = \sum_{j=1}^{6} X_j /1-k_j/ = \sum_{j=1}^{6} X_j m_j \longrightarrow \text{maksimum}$$

gdzie:

k_j - koszt wytworzenia 1 zł usługi w j-tym dziale-służbie /współczynnik kosztu/.

b/ kwadratowa postać funkcji akumulacji

Przy planowej wielkości produkcji koszty jednostkowe /współczynniki kosztu/ ulegają zmianie na skutek innowacji technicznych. W zasadzie mają one tendencję malejącą /jako wynik wzrostu wydajności pracy i produkcyjności czynników rzeczowych procesu produkcji/. W takim razie należy uznać, że związek kosztów i produkcji powinien mieć nieliniowy charakter, tzn. koszty wzrastają nieproporcjonalnie. Duże znaczenie posiada tu tzw. "efekt skali" produkcji. Nieproporcjonalność może posiadać bowiem dwojaki charakter: koszty mogą nieproporcjonalnie rosnąć albo też nieproporcjonalnie maleć.

Stąd niech różnica pomiędzy planowym poziomem współczynników kosztu a poziomem faktycznym wynosi: $\Delta k'_j$, czyli równa się ona różnicy $k'_j - k_j$.

Oznacza to, że zmiany struktury wewnętrznej wytwarzanych usług łączności powinny przynieść względne optimum alokacyjne z uwagi na kryterium akumulacji, a równocześnie spowodować ew. dwukierunkowe zmiany w poziomie jednostkowych współczynników kosztowych $/k_j/$. W takim razie $\Delta k'_j$ określa przyrost w sensie absolutnym /tzn. spadek lub wzrost nakładów/.

Niech z kolei zależność funkcyjną tego przyrostu od poziomu /skali/ produkcji wyraża związek: $b_j X_j$, gdzie współczynnik liniowy b_j jest miarą zmienności współczynników kosztowych w poszczególnych działach i podlega estymacji statystycznej.

W rezultacie:

$$k'_j = k_j \pm b_j X_j \qquad /j = 1,2,\ldots,6/$$

$$m'_j = 1 - k_j \pm b_j X_j, \text{ gdzie } 1 - k_j = m_j \text{ /planowana akumulacja/.}$$

Faktyczna akumulacja jednostkowa m'_j wynosi więc ostatecznie: $m_j \pm b_j X_j$.

Całkowita akumulacja w j-tym dziale /służbie/ wyniesie:

$$m'_j X_j = / m_j \pm b_j X_j / X_j$$

Ostateczna postać funkcji akumulacji dla całej łączności sprowadza się do następującego wyrażenia:

$$F'/X/ = \sum_{j=1}^{6} m'_j X_j = \sum_{j=1}^{6} m_j X_j \pm \sum_{j=1}^{6} b_j X_j^2 ,$$

które należy maksymalizować.

3. Kryterium minimalizacji kosztów wytwarzania

a/ postać kwadratowa

Zakładamy, że jest ono tożsame z kryterium maksymalizacji akumulacji, warunkiem bowiem osiągnięcia maksimum dla wyżej podanej funkcji F'/X/ jest w przypadku więcej niż proporcjonalnego przyrostu kosztów /tj. występowania dodatnich współczynników zmienności kosztów b_j/ minimalizacja tej części kwadratowej. Ostatecznie mamy następującą funkcję kosztów podlegającą minimalizacji:

$$\phi'/X/ = \sum_{j=1}^{6} k_j X_j \pm \sum_{j=1}^{6} b_j X_j^2$$

b/ liniowa postać funkcji kosztów

Jeżeli przez niżej użyte symbole rozumieć będziemy odpowiednio:

w_j - wektor płac w j-tym dziale /służbie/,

z_j - wektor zatrudnienia w tym dziale /służbie/,

p_i - wektor cen czynników produkcji /i = 1,2,...,n/,

przy czym wszystkie wielkości ujmujemy w przeliczeniu na jeden zł produkcji oraz

b'_{ij} - nakład i-tego czynnika w j-tym dziale /służbie/,

wówczas łączny koszt wytwarzania wyrazi się jak poniżej:

$$K/X/ = \sum_{j=1}^{6} X_j / \sum_{i=1}^{n} p_i b'_{ij} + \frac{w_j z_j}{X_j} / \longrightarrow \text{minimum},$$

gdzie:

X_j - wielkość produkcji.

Jeżeli zamiast wyrażenia: $\frac{w_j z_j}{X_j}$ przyjmiemy symbol c_j, a zamiast $p_i b'_{ij}$ - łączne wartościowe oznaczenie Y_{ij}, wówczas przekształcona postać funkcji kosztów będzie wyglądać jak poniżej:

$$K/X/ = \sum_{j=1}^{6} X_j / \sum_{i=1}^{n} Y_{ij} + c_j / \longrightarrow \text{minimum}$$

===

Optymalizacja struktury inwestycji

1. Kryterium maksymalnej czystej efektywności inwestycji

Należy maksymalizować program działania, przy którym określone części funduszu inwestycji lokowane są w poszczególnych służbach. Spełniają one łącznie warunek $\sum_{j=1}^{6} \lambda_j = 1$, tzn. udziały poszczególnych części funduszu lokowanych w danych służbach nie przekraczają wielkości dysponowanego przez łączność funduszu inwestycyjnego w danym okresie t /tj. suma współczynników struktury inwestycyjnej nie przekracza jedności/.

Można to ująć w następujący warunek formalny:

$$J_t \geqslant \sum_{j=1}^{6} x_j \lambda_j,$$

gdzie:

λ_j - wspomniany wyżej współczynnik struktury,

x_j - zmienne decyzyjne działowych /dla poszczególnych służb/funduszy inwest.,

J_t - globalny fundusz inwestycji w okresie t.

Za kryterium takiego programu można by przyjąć poziom łącznej czystej efektywności inwestycji osiąganej w gospodarce łączności, zdefiniowanej jako wielkość nakładów przypadająca na 1 złoty wytwarzanych usług /β'/.

Należy zatem nadać możliwie najwyższą wartość tym współczynnikom działowej struktury inwestycji λ_j, którym odpowiada najwyższa czysta działowa efektywność inwestycji β'_j.

Zagadnienie podlega następującemu sformułowaniu.

Jeżeli:

$$\sum_{j=1}^{6} \lambda_j = 1 \cong \sum_{j=1}^{6} x_j \lambda_j \leqslant J_t \quad \text{albo} \quad 0 \leqslant J_t \sum_{j=1}^{6} \beta'_j \lambda_j =$$

$$= J_j \leqslant g_j \;; \quad j = 1,2,\ldots,6,$$

wówczas maksymalizujemy następującą postać funkcyjną:

$$\beta/x/' = \sum_{j=1}^{6} \lambda_j \beta'_j$$

Występujące przy tym programie warunki $J_j \geqslant 0$ i $J_j \leqslant g_j$ oznaczają odpowiednio, że wyklucza się dekapitalizację w obrębie jakiegokolwiek działu oraz zakłada się istnienie działowych pułapów inwestycyjnych $/g_j/$.

Jest jasne, że musi być tu spełniony warunek

$0 \leqslant J_t < \sum_{j=1}^{6} g_j$, tzn. globalny fundusz inwestycyjny w ramach łączności musi być mniejszy od sumy dopuszczalnych pułapów inwestycyjnych w poszczególnych służbach.

W przeciwnym wypadku nie byłoby problemu wyboru, a fundusz inwestycyjny w pełni zaspokajałby wszystkie potrzeby.

2. Kryterium minimum pracochłonności

Podobnie jak w poprzednim przypadku dokonujemy wyboru pod kątem przydziału zatrudnienia.

Niech l' oznacza współczynnik pełnej pracochłonności dla całej gałęzi łącznie, będący sumą ważoną współczynników działowych /poszczególnych służb/. W takim przypadku należy minimalizować poniższą postać funkcyjną:

$$L'/x/ = \sum_{j=1}^{6} \lambda_j l'_j$$

gdzie:

λ_j - oznacza działowy współczynnik struktury /dla poszczególnej służby/,

l'_j - jest działowym współczynnikiem pełnej pracochłonności, który definiujemy następująco:

$l'_j = l_j/I-A/$,

l_j - norma pracochłonności, zaś macierz reprezentuje strukturę technologiczną rozpatrywanej gałęzi łączności.

3. Kryterium optymalizacji mocy produkcyjnych w poszczególnych działach /służbach/

Zagadnienie optymalnego przebiegu w czasie procesu wytwarzania poszczególnych usług od strony właściwego ustawienia mocy produkcyjnych z uwagi na potrzeby społeczeństwa i gospodarki narodowej /które charakteryzują się nierównomiernym rozkładem w czasie/ sprowadza się do wyznaczenia zdolności produkcyjnych poszczególnych działów /służb/ przy danym rozkładzie zapotrzebowania b_i /np. miesięcznym; wówczas i = 1,2,...,12/, znanym współczynniku kosztu na jeden zł usługi oraz współczynniku kosztowym strat z tytułu niewykorzystania mocy produkcyjnych w poszczególnych działach /służbach/. Ewentualny brak odpowiednich mocy /niemożność świadczenia usługi/ prowadzi do strat równych akumulacji na 1 zł usługi.

Przyjmując zatem poniższe oznaczenia:

k_j – działowy współczynnik kosztu /danej służby/,

r_j – strata z niewykorzystania mocy produkcyjnych,

X_{ij} – produkcja miesięczna /i = 1,2,...,12/ w j-tym dziale-służbie /j = 1,2,...,6/,

$\bar{X}_j$ – produkcja, przy której wykorzystano 100% mocy produkcyjnych,

Y_{ij} – potencjalne zapotrzebowanie przekraczające możliwości produkcyjne,

m_j – jednostkowa akumulacja,

$n_i = \bar{X}_j - X_{ij}$,

$s_i = Y_{ij} - \bar{X}_j$,

definiujemy odpowiednią funkcję łącznych nakładów, którą należy minimalizować:

$$K/X/ = \sum_{j=1}^{6} \sum_{i=1}^{12} r_j n_i + \sum_{j=1}^{6} \sum_{i=1}^{12} k_j X_{ij} + \sum_{j=1}^{6} \sum_{i=1}^{12} m_j s_i$$

Ujmuje ona wszystkie poprzednio omówione elementy nakładów i strat.

3.3. Zagadnienie niezawodności

Poziom niezawodności jest szczególnie ważnym wymogiem, jaki stawia się przed urządzeniami łączności, a zwłaszcza telekomunikacji. Zasługuje on z tej racji na osobną analizę.

Ogólnie można stwierdzić, że wymogi w odniesieniu do jakości usług odzwierciedlają się bez wątpienia w poziomie kosztów jednostkowych, a zatem nie wymagają osobnej analizy funkcyjnej. Jako wielkości w zasadzie niewymierne ilościowo są trudne do wyrażenia w pewnych związkach formalnych. Jedynie w przypadku niezawodności można pokusić się o zdefiniowanie funkcyjnej postaci kryterium ekonomicznego, która optymalizowałaby poziom tej niezawodności w powiązaniu z ekonomicznością procesu wytwarzania. Poniższa analiza jest właśnie próbą ustalenia takiego związku.

Poszczególne elementy dowolnego urządzenia są zawodne w tym czy innym stopniu. W języku cybernetyki mówimy w takim przypadku, że nie dokonała się normalnie zachodząca transformacja /T/ układu /wektora/ stanu wejść w wektor stanu wyjść danego elementu składowego. Wyróżnić można przy tym dwa możliwe przypadki:

1/ stan wyjść przybiera wartość zerową niezależnie od wartości przyjmowanych na wejściu układu /tzn. element układu nie działa/,

2/ przy określonej wartości wejść rozważanego elementu stan wyjść różni się od przewidywanego o wielkość przekraczającą granicę przyjętej tolerancji. Mówimy wtedy, że element działa źle.

W obu tych przypadkach urządzenie zawodzi, czyli jego niezawodność praktyczna jest równa zeru.

Gdy przez:

T_i - oznaczymy operator transformacji właściwy elementowi i-temu /i jest dowolnie wielką liczbą równą ilości elementów składowych rozpatrywanego urządzenia czy układu/, będącemu szeregowo połączonym ogniwem danego urządzenia,

p_i - prawdopodobieństwo niezawodności i-tego elementu,

Y, X - wektory stanów wejść i wyjść,

wówczas łączną transformację urządzenia /regułę działania/ ujmiemy następująco:

$$Y = T_n p_n T_{n-1} p_{n-1} \ldots\ldots T_1 p_1 X = TPX,$$

$n = 1, 2 \ldots\ldots \infty$ – liczba elementów układu sprzężonych szeregowo.

Łączny operator niezawodności P nazwiemy krótko niezawodnością układu, przy czym w przypadku szeregowego sprzężenia elementów jest on iloczynem poszczególnych operatorów niezawodności "elementarnych".

Ponieważ ex. def. $0 \leqslant p_i \leqslant 1$, zatem abstrahując od przypadków krańcowych omówionych na samym wstępie oraz od przypadku absolutnej pewności urządzenia, jego niezawodność maleje w miarę wzrostu liczby elementów składowych.

Jeżeli p oznaczać będzie średnią geometryczną niezawodności p_i, wówczas niezawodność całego układu: $P = p^n$, czyli maleje ona w postępie geometrycznym w miarę wzrostu liczby elementów składowych.

Z powyższego spostrzeżenia wynika praktyczny wniosek, że przy dużej liczbie elementów niezawodność całego urządzenia /układu, sieci/ jest niewielka, nawet gdy poszczególne niezawodności p_i są wysokie. Dlatego też proponuje się, aby drogie i – jak widać – nieopłacalne elementy o wysokim poziomie niezawodności, występujące pojedynczo w połączeniu szeregowym, zastępować /oczywiście wszędzie tam, gdzie jest to możliwe z technicznego punktu widzenia/ dużo tańszymi elementami o niższych charakterystykach niezawodności, ale za to sprzężonych równolegle w sposób alternatywny. Polega to na zwielokrotnieniu elementów w najsłabszych ogniwach urządzenia. Są one połączone równolegle i ponadto w ten sposób, że stan wyjść takiego sprzężenia przybiera zawsze wartość jednego elementu aktualnie działającego. Pozostałe elementy podobne są całkowicie albo częściowo nieczynne. Włączają się one sukcesywnie tylko w wypadku awarii elementu już działającego.

Uwzględniając operatory niezawodności p_i otrzymujemy na wyjściu układu /urządzenia/ wyrażenie:

$$\left[1 - \prod_{i=1}^{n} /1-p_i/\right]$$

określające poziom niezawodności, a mianowicie:

Jeżeli zawodność danego elementu $q_i = 1-p_i$, zaś łączna zawodność urządzenia jest:

$$\prod_{i=1}^{n} q_i = \prod_{i=1}^{n} /1-p_i/,$$

to łączna niezawodność jest wyrażona jak wyżej.

Przystąpimy obecnie do optymalizacji niezawodności w funkcji kosztów jej uzyskania.

Każdy dodatkowy element wprowadzany do urządzenia przyczynia się zarówno do wzrostu nakładów inwestycyjnych /wartość elementu, koszty instalacji/, jak i kosztów eksploatacji /koszty utrzymania w stanie gotowości, amortyzacja/. Z drugiej strony ewentualna zawodność elementu powoduje szereg strat jako wynik przestoju całego urządzenia. Należy zatem przeprowadzić rachunek strat i "zysków" wynikających z podwyższenia niezawodności.

Osiągniemy to przez próbę ustalenia optymalnego poziomu niezawodności, przy którym wzrost kosztów z tytułu zwielokrotnienia elementów pokryty zostanie w pełni przez przewidywane "zyski", jakie osiągniemy przez uniknięcie następstw ewentualnej awarii urządzenia prowadzącej do przestoju, a zatem - strat w wynikach finansowych oraz nakładów na usunięcie usterek.

Niech jak zwykle:

k_j - oznacza koszt, lecz w tym przypadku elementu w j-tym ogniwie sprzężenia szeregowego,

s - koszt awarii,

q=1-p - prawdopodobieństwo awarii /zakładamy znajomość rozkładu prawdopodobieństwa zajścia awarii/.

Stąd wyrażenie na łączny spodziewany koszt, które należy minimalizować, ma poniższą postać:

$$\sum_{j=1}^{n} e_j k_j + s/1-p/$$

Pierwszy składnik wyraża łączny koszt zwielokrotnienia j-tych elementów /e_j/ urządzenia, drugi jest nadzieją matematyczną kosztu awarii /mierzonego np. współczynnikiem przestoju plus koszty naprawy/.

Należy zatem znaleźć takie wartości e_j /ilość zwielokrotnionych elementów j-tego ogniwa/ oraz p, dla których łączny spodziewany koszt jest minimum:

$$P = \prod_{j=1}^{n} \left[1 - \prod_{i=1}^{e_j} /1-p_{ij}/\right],$$

gdzie p_{ij} jest niezawodnością kolejnego elementu w j-tym ogniwie sprzężeń.

4. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono pewne propozycje co do charakteru funkcji-kryteriów alokacji sił wytwórczych w dziedzinie łączności.

Wielkość efektów alokacji zależy z jednej strony od rozmiarów dysponowanych środków, a z drugiej - od struktury ich rozdziału. Tę ostatnią możemy wyznaczyć optymalizując wybraną postać funkcji-kryterium. W ramach badań optymalizacyjnych zakładamy, że efekty dają się ująć jednorodnie dla całego badanego układu gospodarczego /gałęzi, działu, służby/ oraz przychód /efekt/ z określonego działu /służby/ jest względnie niezależny od kierunku alokacji pozostałych zasobów. Stąd łączny efekt daje się ustalić drogą sumowania efektów działowych /dla poszczególnych służb/. Występująca każdorazowo funkcja-kryterium powinna być dobrana wnikliwie z uwzględnieniem hierarchii celów właściwej danej dziedzinie /w danym przypadku - łączności/.

W końcu należy stwierdzić, iż warunkiem rozwiązywalności zadań z zakresu teorii programowania, zawierających z reguły dużą ilość zmiennych decyzyjnych oraz wielkości parametrycznych, jest możliwość korzystania z maszyn cyfrowych o dużej pamięci operacyjnej i szybkości liczenia.

Poza tym wydaje się celowe wprowadzenie wydajności pracy i postępu technicznego w formie zależności nieliniowych, gdyż otrzymane w ten sposób modele spełniają postulat praktyczności.

Jeszcze raz podkreślić wypada niezwykłą trudność praktycznej stosowalności rachunku optymalizacyjnego na gruncie łączności, która jest gałęzią o dużej specyfice procesów wytwarzania, co w konsekwencji utrudnia zdobycie niezbędnych przy tym rachunku integralnych elementów i wielkości ekonomicznych.

Artykuł niniejszy zawiera wstępną próbę ustalenia odpowiednich dla łączności kryteriów alokacji zasobów. Mimo wspomnianych wyżej trudności uzyskania rozwiązań praktycznych, wysiłek częściowego chociaż ich pokonania zostanie podjęty w ramach pracy planowej p.t. "Zagadnienia optymalnej alokacji sił wytwórczych w dziedzinie łączności" prowadzonej przez Zakład Ekonomiki Łączności IŁ.

WYKAZ LITERATURY

1. Ambarcumow A.: Problemy ispolzowanija matiematiczeskich mietodow w płanirowanii. Płanowoje Chozjajstwo 2/1968/.

2. Bellman R.E., Dreyfus S.E.: Programowanie dynamiczne. Warszawa 1967.

3. Ekonometria a praktyka planowania - praca zbiorowa. Warszawa 1965.

4. Feret M.: Jakość usług w telefonicznych sieciach automatycznych. Przegląd Zagadnień Łączności, 4/1967/.

5. Feret M.: Niezawodność urządzeń telekomunikacyjnych z ekonomicznego punktu widzenia. Przegląd Zagadnień Łączności, 4/1967/.

6. Fiszel H.: Uwzględnienie w rachunku ekonomicznym więcej niż jednej funkcji kryterium. Przegląd Statystyczny, 4/1964/.

7. Kantorowicz L.: Rachunek ekonomiczny optymalnego wykorzystania zasobów. Warszawa 1961.

8. Klein L.R.: Wstęp do ekonometrii. Warszawa 1965.

9. Kronrod J.: Ekonomiczeskij optimum i niekotoryje woprosy mietodołogii optimizacji narodnochozjajstwiennych płanow. Woprosy Ekonomiki, 1/1968/.

10. Lange O.: Wstęp do ekonometrii, wyd. 4. Warszawa 1967.

11. Lange O.: Wstęp do cybernetyki ekonomicznej. Warszawa 1965.

12. Lange O.: Ekonomia polityczna, t. II. Warszawa 1966.

13. Lange O.: Optymalne decyzje, wyd. 2, Warszawa 1967.

14. Łoś J.: Uwagi o optymalizacji kilku wielkości. Przegląd Statystyczny, 3/1965/.

15. Matiematiczeskije mietody płanirowanija i uprawlenija w chozjajstwie swiazi. Wiestnik Swiazi, 1/1968/.

16. Moszkowicz L.: Programowanie kwadratowe. Maszyny Matematyczne, 1-2/1968/.

17. Pawłowski Z.: Modele ekonometrycznej analizy kosztów. Ekonomista, 3/1965/.

18. Pawłowski Z.: Przyczynek do ekonometrycznej analizy kosztów, Przegląd Statystyczny, 3/1967/.

19. Pietrzak J.: Wprowadzenie w zagadnienie niezawodności. Problemy Łączności, 3/1966/.

20. Porwit K.: Zagadnienia rachunku ekonomicznego w planie centralnym. 1964.

21. Rafałowicz Z.: Planowanie perspektywicznego rozwoju telefonii. Warszawa, 1963.

22. Rakowski M.: W sprawie metod optymalizacji programów rozwoju poszczególnych gałęzi produkcji. Gospodarka Planowa, 5/1966/.

23. Rydz L.: Problemy planowania w telekomunikacji. Przegl. Zag. Łączn., 7/1967/.

24. Sadowski W.: Teoria podejmowania decyzji, 1960.

25. Socrates L.: A Resource Allocation Problem. Operation Research, 6/1965/.

26. Strumilin S.: O kritierijach w optymalnom płanirowanii. Woprosy Ekonomiki, 4/1968/.

27. Strupiechowski B.: Podstawowe wiadomości z zakresu kosztów i polityki taryfowej łączności. Warszawa 1962.

28. Szatalin S.: Płanomiernoje sowierszenstwowanije struktury obszczestwiennogo proizwodstwa. Płanowoje chozjajstwo, 2/1968/.

29. Szwedowski S.: Problemy wyboru metod wytwarzania w programowaniu gałęziowym. Gospodarka Planowa, 2/1968/.

30. Waloszek S.: Zasady pobierania próby do analizy statystycznej jakości usług central telefonicznych. Problemy Łączności, 1/1967/.

Zbigniew Dudziński

ZAGADNIENIE OPTYMALNEGO ROZKŁADU ZMIAN PERSONELU W WARUNKACH NIERÓWNOMIERNEGO NATĘŻENIA PRACY

1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Jedną z charakterystycznych cech pracy placówek łączności jest nierównomierność w czasie zapotrzebowania na usługi łączności. Wynika to z określonych przyczyn społecznych i przejawia się np. w nierównomiernym napływie klientów do okienek pocztowych, w nierównomiernym ruchu paczek i przesyłek pocztowych, w nierównomiernym natężeniu zgłoszeń na telefoniczne rozmowy międzymiastowe, w nierównomiernym natężeniu ruchu telegraficznego itp. Zapotrzebowanie rozkłada się nierównomiernie według miesięcy roku, dni miesiąca, dni tygodnia i godzin doby.

Z punktu widzenia gospodarczego rozwiązanie idealne polegałoby na zapewnieniu ścisłej zgodności rozkładu zapotrzebowania i rozkładu w czasie zdolności usługowej; jednakże na przeszkodzie temu stoją określone warunki organizacyjno-techniczne.

Jeżeli rozpatruje się działalność, w której o aktualnej zdolności usługowej decyduje aktualny stan personelu w służbie /np. liczba obsadzonych okienek pocztowych, liczba obsadzonych stanowisk central międzymiastowych/ - to na przeszkodzie ścisłemu dostosowaniu aktualnego stanu personelu do rozkładu zapotrzebowania stoją osobiste interesy pracownicze, ustalone w przepisach regulaminu pracy. Np. jest bowiem nie do pomyślenia, aby telefonistka stawiała się do pracy trzykrotnie w ciągu doby na 2 godzinne zmiany lub żeby pracownik rozdzielni paczkowej pracował przez 3 tygodnie codziennie, a wolne dni odbierał pod rząd w końcu miesiąca.

W tych warunkach /jeśli założy się, że stan zdolności usługowej nie może być w żadnym momencie mniejszy od aktualnego zapotrzebowania/ okazują się nieuniknione pewne straty czasu roboczego. Jednakże poprzez właściwy rozkład zmian personelu /dobowy, tygodniowy, miesięczny/ można dążyć do minimalizacji tych nieproduktywnych strat czasu.

Na tym tle można sformułować problem optymalizacyjny w sposób następujący: dany jest rozkład w czasie niezbędnej liczby personelu w służbie oraz są określone ograniczenia wynikające z regulaminu pracy; należy określić optymalny rozkład zmian personelu /określić momenty rozpoczynania i kończenia pracy przez poszczególnych pracowników/ w ten sposób, aby zapewnić minimum łącznych nakładów czasu roboczego lub /co na jedno wychodzi/ minimum nieproduktywnych strat czasu roboczego.

2. MOŻLIWOŚCI OPTYMALIZACJI ROZKŁADU ZMIAN PERSONELU

Praktyczne rozwiązanie problemu optymalizacyjnego, sformułowanego w rozdz. 1, nie jest rzeczą prostą.

Przede wszystkim na ogół istnieje ogromna liczba różniących się od siebie planów rozkładu zmian personelu. Aby zapewnić minimalizację łącznych nakładów czasu roboczego, należałoby - przy posługiwaniu się prymitywnymi metodami - wszystkie te możliwe plany wyliczyć i dla każdego z nich obliczyć wartość łącznych nakładów czasu roboczego, aby w ten sposób móc wyodrębnić to jedyne rozwiązanie optymalne.

Postępowanie takie jest niezwykle kłopotliwe i dlatego praktycznie nie do zastosowania.

Toteż stosuje się tu metody programowania liniowego, które dysponuje takimi algorytmami /metodami postępowania/, które w rozsądnej liczbie kroków zapewniają uzyskanie ścisłego optimum, a więc - jak w rozpatrywanym problemie - minimum łącznych nakładów czasu roboczego.

Metody programowania liniowego wymagają najpierw ścisłego sformułowania badanego problemu w języku matematycznym, czyli zbudowania modelu matematycznego.

Model taki składa się z funkcji celu podlegającej - jak w badanym problemie - minimalizacji oraz z pewnej liczby warunków ograniczających.

Funkcją celu są tu łączne nakłady czasu roboczego, czyli suma obecności wszystkich pracowników.

Ograniczenia polegają tu na tym, że dla poszczególnych jednostek czasu /godzin doby, dni tygodnia, miesięcy roku/ stan obecnych pracowników musi być większy od niezbędnej ich liczby, wynikającej z natężenia pracy.

Budowanie modelu matematycznego dla problemu rozkładu zmian personelu zostanie bliżej wyjaśnione na 3 przykładach, zawartych w niniejszym artykule.

Ponieważ dla problemu rozkładu zmian personelu zarówno warunki ograniczające, jak i funkcja celu są liniowe - problem wchodzi w zakres zainteresowań programowania liniowego i może być rozwiązywany za pomocą uniwersalnego algorytmu dla rozwiązywania zadań z zakresu programowania liniowego, tzw. algorytmu simpleks.

3. PRZYKŁAD DLA ROZKŁADU ZMIAN PERSONELU W CIĄGU DNI TYGODNIA

3.1. Dane wyjściowe przykładu

Przyjmijmy dla potrzeb niniejszego przykładu, że w zakładzie łączności /np. w sporym urzędzie pocztowym/

niezbędna liczba pracowników w pracy w poszczególnych dniach tygodnia przedstawia się następująco[1]:

Dzień tygodnia	Poniedz.	Wtorek	Środa	Czwartek	Piątek	Sobota	Niedziela
Indeks dnia tygodnia	1	2	3	4	5	6	7
Niezbędna liczba pracowników	30	25	28	31	30	26	12

Przyjmijmy dalej, że każdy pracownik powinien być obecny w pracy w ciągu pełnych 6 dni w ciągu tygodnia.

Należy opracować taki rozkład zmian /tzn. należy określić dla każdego pracownika dzień wolny w tygodniu/ w ten sposób, aby zminimalizować łączny czas obecności wszystkich pracowników /w osobodniach/.

Temu samemu celowi służy również minimalizacja sumy

---

[1] Liczby niezbędnych pracowników w tym i w następnych przykładach zostały przyjęte w sposób dowolny, choć prawdopodobny. Określenie tych liczb dla poszczególnych dni tygodnia, miesięcy roku i godzin doby w zależności od wahań ruchu pocztowego i telekomunikacyjnego wykracza poza temat artykułu. Dla określenia tych liczb angażuje się inne metody matematyczne /statystyka matematyczna, teoria masowej obsługi/.

nadmiarów stanu pracowników obecnych w pracy ponad niezbędną liczbę pracowników.

3.2. Model matematyczny dla optymalizacji zagadnienia

Oznaczmy przez x_i liczbę pracowników, dla których wolny dzień w tygodniu przypada w i-tym dniu tygodnia, a więc np. x_4 oznacza liczbę pracowników, którym wolny dzień przypada we czwartek.

Wobec tego np. w poniedziałek /i = 1/ obecni w pracy są pracownicy, dla których wolny dzień w tygodniu wypada od wtorku do niedzieli, tzn. liczba tych pracowników wynosi:

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

Ta liczba obecnych pracowników powinna być nie mniejsza od niezbędnej liczby pracowników w poniedziałek, tzn. według danych tego przykładu od 30:

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 30$$

Porównując stan pracowników obecnych z niezbędną liczbą pracowników dla wszystkich dni tygodnia otrzymuje się następujący układ ograniczeń modelu matematycznego:

$$\left.\begin{array}{r} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 30 \\ x_1 \qquad + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 25 \end{array}\right\} \qquad /1/$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \phantom{{}+ x_3} + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 28 \\ x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+ x_4} + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 31 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \phantom{{}+ x_5} + x_6 + x_7 \geqslant 30 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \phantom{{}+ x_6} + x_7 \geqslant 26 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \phantom{{}+ x_7} \geqslant 12 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}\text{c.d.} \\ /1/\end{array}$$

Łączny czas obecności wszystkich pracowników, który podlega minimalizacji, określa następująca funkcja celu:

$$F = 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 6x_6 + 6x_7 \longrightarrow \min \qquad /2a/$$

Oczywiście, model matematyczny nie ulegnie zmianie, jeśli zamiast funkcji celu, określonej wzorem /2a/ będzie podlegać minimalizacji $\frac{1}{6}F$, tzn. funkcja:

$$F' = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \longrightarrow \min \qquad /2b/$$

Ażeby układ nierówności /1/ sprowadzić do układu równań, należy wprowadzić tzw. zmienne swobodne, $N_1 - N_7$, gdzie N_i jest nadmiarem stanu pracowników obecnych w pracy ponad niezbędną ich liczbę w i-tym dniu tygodnia:

$$\left.\begin{array}{l} \phantom{x_1 +{}} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 - N_1 = 30 \\ x_1 \phantom{{}+ x_2} + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 - N_2 = 25 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+ x_3} + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 - N_3 = 28 \\ x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+ x_4} + x_5 + x_6 + x_7 - N_4 = 31 \end{array}\right\} \quad /3/$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad + x_6 + x_7 - N_5 = 30 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad + x_7 - N_6 = 26 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \qquad - N_7 = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{c.d.} \\ /3/ \end{array}$$

Zamiast funkcji celu, określonej wzorem /2b/ - po wprowadzeniu zmiennych swobodnych - może podlegać minimalizacji suma nadmiarów:

$$F'' = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 \longrightarrow \min \qquad /4/$$

Tak więc ostatecznie model matematyczny dla ujętego w tym przykładzie rozkładu zmian personelu w ciągu dni tygodnia polega na minimalizacji funkcji celu, określonej wzorem /2b/, lub funkcji celu, określonej wzorem /4/ przy zachowaniu warunków ograniczających, określonych układem równań /3/.

Powyższy model matematyczny, jako model z zakresu programowania liniowego, rozwiązuje się za pomocą algorytmu simpleks.

Algorytm simpleks wymaga, aby jako rozwiązanie wyjściowe przyjąć rozwiązanie, w którym wszystkie zmienne decyzyjne są równe zeru. Aby przy tym zachować zgodność warunków ograniczających, należy do nich wprowadzić tzw. zmienne sztuczne $S_1 - S_7$ /którym ostatecznie można nie nadawać żadnego sensu ekonomicznego/. Po wprowadzeniu zmiennych sztucznych układ warunków ograniczających przedstawia się w sposób następujący:

$$\left.\begin{array}{l}
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 - N_1 + S_1 = 30 \\
x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 - N_2 + S_2 = 25 \\
x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 - N_3 + S_3 = 28 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 - N_4 + S_4 = 31 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 - N_5 + S_5 = 30 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 - N_6 + S_6 = 26 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - N_7 + S_7 = 12
\end{array}\right\} \quad /5/$$

Ażeby zapewnić, że zmienne sztuczne nie wystąpią w ostatecznym rozwiązaniu, należy je wprowadzić do funkcji celu /która podlega minimalizacji/ ze współczynnikiem + M, gdzie M jest dowolnie dużą liczbą.

$$F''' = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + \quad /6/$$

$$+ M\,S_1 + M\,S_2 + M\,S_3 + M\,S_4 + M\,S_5 + M\,S_6 + M\,S_7$$

Dla porządku należy jeszcze wprowadzić warunek, aby zmienne decyzyjne przyjmowały tylko wartości nieujemne

$$x_i \geqslant 0 \qquad N_i \geqslant 0 \qquad /7/$$

oraz warunek, aby uzyskane rozwiązanie wypadło w liczbach całkowitych /gdyż zmiennymi są liczby pracowników/.

3.3. Przebieg rozwiązania modelu matematycznego

Model matematyczny ustalony w rozdz. 3.2. rozwiązuje się za pomocą algorytmu simpleks. Algorytm ten jest pre-

T a b l i c a 1

Pierwsza, wyjściowa tablica simpleks

	M	M	M	M	M	M	M								1	1	1	1	1	1	1	
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
S_1	1							−1								1	1	1	1	1	1	30
S_2		1							−1						1		1	1	1	1	1	25
S_3			1							−1					1	1		1	1	1	1	28
S_4				1							−1				1	1	1		1	1	1	31
S_5					1							−1			1	1	1	1		1	1	30
S_6						1							−1		1	1	1	1	1		1	26
← S_7							1							−1	$\boxed{1}$	1	1	1	1	1		12

zentowany w dość licznej literaturze z zakresu programowania liniowego; wydaje się, że w sposób przystępny przedstawiony on jest w książce Sadowskiego [4] w § 9, str. 45-87.

W związku z tym nie byłoby, oczywiście, celowe przedstawianie tu zasad tego algorytmu, a jedynie zostaną pokazane podstawowe etapy rozwiązania modelu według tego algorytmu.

Wyjściowa tablica simpleks jest przedstawiona w tabl. 1. Według tej tablicy zmienne $S_1 - S_7$ /wymienione po lewej stronie tablicy/ przybierają wartości /wymienione po prawej stronie tablicy/ zgodne z wyrazami po prawej stronie równań układu warunków ograniczających /5/. Współczynniki tablicy simpleks są zgodne ze współczynnikami układu /5/. Współczynniki przy zmiennych według funkcji celu /6/ uwidocznione są w tablicy simpleks ponad wierszem oznaczeń zmiennych.

Z rozwiązania ujętego w tabl. 1 zależy na wyrugowaniu zmiennych sztucznych $S_1 - S_7$, które są związane z bardzo dużymi współczynnikami + M w funkcji celu /6/.

W związku z tym przyjęto jako element przekształcenia tablicy simpleks element na przecięciu kolumny x_1 i wiersza S_7. Tak więc ulega wprowadzeniu do rozwiązania zmienna $x_1 = 12$, a wyrugowaniu zmienna S_7. Po odpowiednich przekształceniach współczynników tablicy simpleks i po zmianie wartości wyrazów wolnych /po prawej stronie tablicy simpleks/:

$$S_1 = 30$$

$$S_2 = 25 - 12 = 13$$

$$S_3 = 28 - 12 = 16$$

$$S_4 = 31 - 12 = 19$$

$$S_5 = 30 - 12 = 18$$

$$S_6 = 26 - 12 = 14$$

$$x_1 = 12$$

aktualną tablicę simpleks przedstawia tabl. 2.

Teraz kolej przypada na wyrugowanie zmiennej S_2 i wprowadzenie na jej miejsce do rozwiązania zmiennej $x_7 = 13$.

Po odpowiednich przekształceniach tablica simpleks pokazana jest w tabl. 3.

Ponieważ z tabl. 3 wynika, że największe zmniejszenie wartości zmiennych sztucznych powoduje wprowadzenie zmiennej x_2, wobec tego zmienna ta zostanie wprowadzona na miejsce tej zmiennej, która wykazuje najniższą wartość spośród zmiennych objętych aktualnym rozwiązaniem, a związanych z wprowadzaną zmienną dodatnimi współczynnikami tablicy simpleks.

Sytuację po wprowadzeniu zmiennej $x_2 = 1$ przedstawia tabl. 4.

Obecnie zostanie wyrugowana zmienna S_3 i na jej miejsce zostanie wprowadzona zmienna $x_6 = 2$.

Po przekształceniach nową tablicę simpleks przedstawia tabl. 5. W sytuacji przedstawionej w tabl. 5 wyrugowaniu podlega zmienna S_5, a na jej miejsce podlega wprowadzeniu zmienna $x_3 = 2$.

Nowa tablica simpleks po wprowadzeniu tych zmian jest pokazana w tabl. 6.

Obecnie zasługuje na wprowadzenie zmienna x_5. Nowo wprowadzana zmienna może przyjąć najmniejszą spośród iloczynów wyrazów wolnych /po prawej stronie tablicy simpleks/ przez dodatnie współczynniki tablicy simpleks w kolumnie x_5. Wartość ta wynosi 0,2 i wprowadzenie zmiennej x_5 związane jest z wyrugowaniem zmiennej S_1.

Aktualna sytuacja po kolejnych przekształceniach tablicy simpleks pokazana jest w tabl. 7.

W tablicy 7 na przecięciu jedynej nie wprowadzonej zmiennej z grupy x, a mianowicie x_4, i jedynej nie wyrugowanej zmiennej swobodnej S_4 znajduje się ujemny współczynnik, co oznacza, że nie udaje się wyrugować zmiennej S_4 przez wprowadzenie zmiennej x_4.

Wobec tego zdecydowano wprowadzić zmienną N_2, która przyjmuje wartość wyrazu wolnego podzielonego przez współczynnik na przecięciu kolumny N_2 i wiersza S_4:

$$\frac{0,8}{0,2} = 4$$

Ósmą z kolei tablicę simpleks zawiera tabl. 8. Jest to już ostatnia tablica tego procesu rozwiązywania modelu matematycznego i zawiera ostateczne rozwiązanie, ponieważ nie występują w niej już zmienne sztuczne, które w funkcji celu związane są z bardzo dużymi współczynnikami i ponieważ żadna dalsza zmiana tej tablicy /wprowa-

T a b l i c a 2

Druga tablica simpleks

	M	M	M	M	M	M	M								1	1	1	1	1	1	1	
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
S_1	1							−1								1	1	1	1	1	1	30
← S_2		1					−1		−1					1		−1					$\boxed{1}$	13
S_3			1				−1			−1				1			−1				1	16
S_4				1			−1				−1			1				−1			1	19
S_5					1		−1					−1		1					−1		1	18
S_6						1	−1						−1	1						−1	1	14
→ x_1							1							−1	1	1	1	1	1	1		12

T a b l i c a 3

Trzecia tablica simpleks

	M	M	M	M	M	M	M								1	1	1	1	1	1	1	
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
S_1	1	−1					1	−1	1					−1		2	1	1	1	1		17
x_7		1					−1		−1					1		−1					1	13
S_3		−1	1						1	−1						1	−1					3
S_4		−1		1					1		−1					1		−1				6
S_5		−1			1				1			−1				1			−1			5
S_6		−1				1			1				−1			$\boxed{1}$				−1		1
x_1							1							−1	1	1	1	1	1	1		12

T a b l i c a 4

Czwarta tablica simpleks

	M	M	M	M	M	M	M								1	1	1	1	1	1	1	
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
S_1	1	1				−2	1	−1	−1				2	−1			1	1	1	3		15
x_7						1	−1						−1	1						−1	1	14
← S_3			1			−1				−1			1				−1			$\boxed{1}$		2
S_4				1		−1					−1		1					−1		1		5
S_5					1	−1						−1	1						−1	1		4
→ x_2		−1				1			1				−1			1				−1		1
x_1		1				−1	1		−1				1	−1	1		1	1	1	2		11

T a b l i c a 5

Piąta tablica simpleks

	M	M	M	M	M	M	M								1	1	1	1	1	1	1	
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
S_1	1	1	-3			1	1	-1	-1	3			-1	-1			4	1	1			9
x_7			1				-1			-1				1			-1				1	16
$\rightarrow x_6$			1			-1				-1			1				-1			1		2
S_4			-1	1						1	-1						1	-1				3
$\leftarrow S_5$			-1		1					1		-1					$\boxed{1}$		-1			2
x_2		-1	1						1	-1						1	-1					3
x_1		1	-2			1	1		-1	2			-1	-1	1		3	1	1			7

Tablica 6

Szósta tablica simpleks

	M	M	M	M	M	M	M								1	1	1	1	1	1	1	
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
$\leftarrow S_1$	1	1	1		−4	1	1	−1	−1	−1		4	−1	−1				1	$\boxed{5}$			1
x_7					1		−1					−1		1					−1		1	18
x_6					1	−1						−1	1						−1	1		4
S_4				1	−1						−1	1						−1	1			1
$\rightarrow x_3$			−1		1					1		−1					1		−1			2
x_2		−1			1				1			−1				1			−1			5
x_1		1	1		−3	1	1		−1	−1		3	−1	−1	1			1	4			1

Tablica 7

Siódma tablica simpleks

	M	M	M	M	M	M	M								1	1	1	1	1	1	1	
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
$\rightarrow x_5$	0,2	0,2	0,2		−0,8	0,2	0,2	−0,2	−0,2	−0,2		0,8	−0,2	−0,2				0,1	1			0,2
x_7	0,2	0,2	0,2		0,2	0,2	−0,8	−0,2	−0,2	−0,2		−0,2	−0,2	0,8				0,2			1	18,2
x_6	0,2	0,2	0,2		0,2	−0,8	0,2	−0,2	−0,2	−0,2		−0,2	0,8	−0,2				0,2		1		4,2
$\leftarrow S_4$	−0,2	−0,2	−0,2	1	−0,2	−0,2	−0,2	0,2	$\boxed{0,2}$	0,2	−1	0,2	0,2	0,2				−1,2				0,8
x_3	0,2	0,2	−0,8		0,2	0,2	0,2	−0,2	−0,2	0,8		−0,2	−0,2	−0,2			1	0,2				2,2
x_2	0,2	−0,8	0,2		0,2	0,2	0,2	−0,2	0,8	−0,2		−0,2	−0,2	−0,2		1		0,2				5,2
x_1	−0,8	0,2	0,2		0,2	0,2	0,2	0,8	−0,2	−0,2		−0,2	−0,2	−0,2	1			0,2				0,2

Tablica 8

Ósma, ostatnia tablica simpleks

	M	M	M	M	M	M	M								1	1	1	1	1	1	1	
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5				1	−1						−1	1						−1	1			1
x_7				1			−1				−1			1				−1			1	19
x_6				1		−1					−1		1					−1		1		5
→ N_2	−1	−1	−1	5	−1	−1	−1	1	1	1	−5	1	1	1				−6				4
x_3			−1	1						1	−1						1	−1				3
x_2	1		1	−4	1	1	1	−1		−1	4	−1	−1	−1		1		5				2
x_1	−1			1				1			−1				1			−1				1

dzenie nowych zmiennych nie objętych rozwiązaniem/ nie powoduje zmniejszenia wartości funkcji celu.

3.4. Rozwiązanie przykładu

Z tablicy 8 wynika następujące rozwiązanie przykładu:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$
$$x_5 = 1$$
$$x_6 = 5$$
$$x_7 = 19$$
$$N_2 = 4$$

Rozwiązanie to oznacza, że 1 pracownik powinien otrzymać dzień wolny w tygodniu w poniewdziałek, 2 - we wtorek itd. i w końcu 19 pracowników powinno otrzymać dzień wolny w niedzielę. Poza tym rozwiązanie to oznacza, że jest nieunikniony nadmiar 4 pracowników ponad niezbędną liczbę we wtorek.

Rozwiązanie to spełnia układ równań /3/, co możemy łatwo sprawdzić:

w poniedziałek:	$2 + 3 + 1 + 5 + 19 = 30$
we wtorek:	$1 + 3 + 1 + 5 + 19 - 4 = 25$
w środę:	$1 + 2 + 1 + 5 + 19 = 28$
we czwartek:	$1 + 2 + 3 + 1 + 5 + 19 = 31$
w piątek:	$1 + 2 + 3 + 5 + 19 = 30$
w sobotę:	$1 + 2 + 3 + 1 + 19 = 26$
w niedzielę:	$1 + 2 + 3 + 1 + 5 = 12$

Wartość funkcji celu według wzoru /2b/ dla otrzymanego rozwiązania przyjmuje wartość:

$$F' = 1 + 2 + 3 + 1 + 5 + 19 = 31$$

i jest to możliwie najniższa wartość funkcji celu przy danych ograniczeniach.

Wartość funkcji celu F' oznacza liczbę wszystkich zatrudnionych pracowników i jest zgodna z największą niezbędną liczbą pracowników w ciągu tygodnia /we czwartek - 31 pracowników/.

Rozwiązanie uzyskane bezpośrednio z tabl. 8 jest przedstawione graficznie w górnej części rys. 1.

Z tablicy 8 wynika ponadto możliwość uzyskania wariantów optymalnego rozwiązania, charakteryzujących się tą samą wartością funkcji celu.

A oto zestawienie tych wariantów optymalnego rozwiązania /jako wariant 1 należy traktować przedstawione wyżej rozwiązanie, uzyskane bezpośrednio z ostatniej - ósmej - tablicy simpleks/:

wariant 2 /przez wprowadzenie zmiennej N_1 na miejsce x_1/

$$x_2 = 3 \qquad N_1 = 1$$
$$x_3 = 3 \qquad N_2 = 3$$
$$x_5 = 1$$
$$x_6 = 5$$
$$x_7 = 19$$

wariant 3 /przez wprowadzenie zmiennej N_3 na miejsce x_3/

$$x_1 = 1 \qquad N_2 = 1$$

$x_2 = 5 \quad N_3 = 3$
$x_5 = 1$
$x_6 = 5$
$x_7 = 19$

wariant 4 /przez wprowadzenie zmiennej N_5 na miejsce x_5/

$x_1 = 1 \quad N_2 = 3$
$x_2 = 3 \quad N_5 = 1$
$x_3 = 3$
$x_6 = 5$
$x_7 = 19$

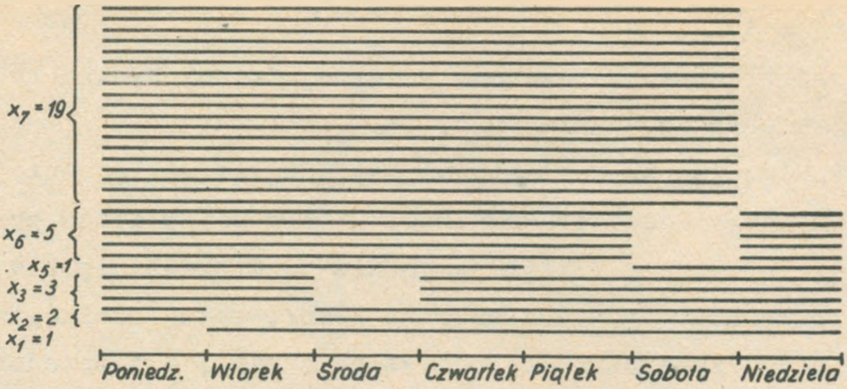
wariant 5 /przez wprowadzenie zmiennej N_6 na miejsce N_2/

$x_1 = 1 \quad N_6 = 4$
$x_2 = 6$
$x_3 = 3$
$x_5 = 1$
$x_6 = 1$
$x_7 = 19$

wariant 6 /przez wprowadzenie zmiennej N_7 na miejsce N_2/

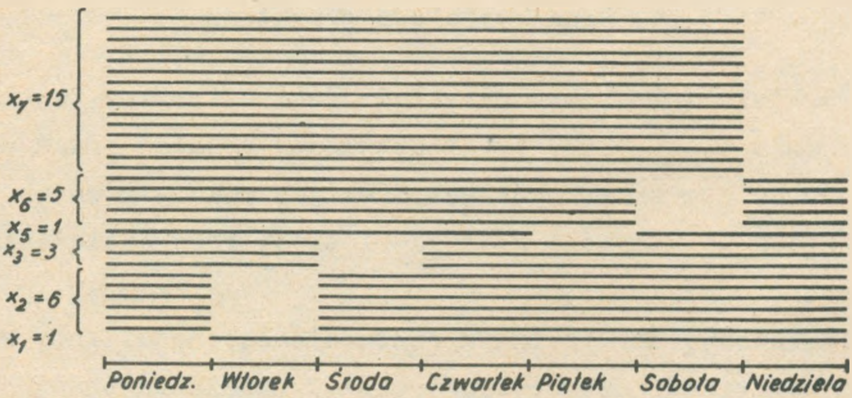
$x_1 = 1 \quad N_7 = 4$
$x_2 = 6$
$x_3 = 3$
$x_5 = 1$
$x_6 = 5$
$x_7 = 15$

Jak można łatwo sprawdzić, dla wszystkich tych wariantów spełniony jest układ równań /3/; dla wszystkich



	Poniedz.	Wtorek	Środa	Czwartek	Piątek	Sobota	Niedziela
Liczba prac. obecnych	30	29	28	31	30	26	12
Liczba prac. niezbędnych	30	25	28	31	30	26	12
Nadmiar	–	4	–	–	–	–	–

Jedna kreska oznacza jednego pracownika



	Poniedz.	Wtorek	Środa	Czwartek	Piątek	Sobota	Niedziela
Liczba prac. obecnych	30	25	28	31	30	26	16
Liczba prac. niezbędnych	30	25	28	31	30	26	12
Nadmiar	–	–	–	–	–	–	4

Rys. 1. Rozwiązanie przykładu dla rozkładu zmian w ciągu dni tygodnia

tych wariantów uzyskuje się tę samą wartość funkcji celu F' = 31.

Dla ilustracji pokazano w dolnej części rys. 1 rozwiązanie według wariantu 6.

Porównując te warianty między sobą ze względu na jak największą liczbę pracowników, którym wolny dzień przypada w niedzielę /i tym samym nie ma w niedzielę nadmiaru pracowników ponad niezbędny stan/, można uważać, że wariant 1 /bezpośrednio odczytany z tabl. 8 i przedstawiony w górnej części rys. 1/ jest korzystniejszy niż wariant 6 /przedstawiony w dolnej części rys. 1/.

4. PRZYKŁAD DLA ROZKŁADU URLOPÓW W CIĄGU ROKU

4.1. Dane wyjściowe przykładu

Tematem niniejszego przykładu jest optymalny rozkład urlopów w ciągu roku, czyli optymalny rozkład zmian personelu według poszczególnych miesięcy roku - w warunkach nierównomiernego w ciągu miesięcy roku obciążenia pracą.

Powiedzmy, że w badanym zakładzie łączności /np. w oddziale urzędu dworcowego/ rozkład natężenia pracy jest tego rodzaju, że niezbędna liczba potrzebnych pracowników w poszczególnych miesiącach wynosi jak to ilustruje tablica na str. 67.

Załóżmy dalej, że poszczególni pracownicy wykorzystują urlop w całości w ciągu pełnych miesięcy kalendarzowych i są obecni w pracy przez pozostałe 11 miesięcy.

Miesiąc	Indeks miesiąca	Niezbędna liczba pracowników
Styczeń	1	130
Luty	2	85
Marzec	3	120
Kwiecień	4	105
Maj	5	110
Czerwiec	6	120
Lipiec	7	80
Sierpień	8	70
Wrzesień	9	100
Październik	10	115
Listopad	11	125
Grudzień	12	140

Chodzi o takie zaplanowanie rozkładu urlopów, aby zapewnić pokrycie wymienionych wyżej niezbędnych liczb pracowników przy minimalnej liczbie pracowników /przy minimalnych nakładach pracy w postaci stanu obecności w osobo-miesiącach/.

4.2. Model matematyczny dla optymalizacji zagadnienia

Oznaczmy przez x_i liczbę pracowników, którzy korzystają z urlopu w i-tym miesiącu /według podanych wyżej indeksów miesięcy/. Np. x_6 oznacza liczbę pracowników, którzy wykorzystują urlop w czerwcu.

Na przykład w styczniu /dla $i = 1$/ obecni są w pracy pracownicy, którzy wykorzystują urlop od lutego do grudnia, czyli ich suma wynosi:

$$x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}$$

Liczba tych pracowników obecnych w pracy w styczniu powinna być nie mniejsza od podanej w rozdz. 4.1 w tabelce niezbędnej liczby pracowników:

$$x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12} \geqslant 130$$

Oznaczmy przez N_i nadmiar stanu pracowników obecnych w pracy ponad ich niezbędną liczbę w i-tym miesiącu. Wobec tego odejmując od lewej strony powyższej nierówności zmienną N_1 /dla stycznia/ uzyskuje się zamiast nierówności następujące równanie:

$$x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12} - N_1 = 130$$

Zestawiając tego typu równania dla wszystkich miesięcy roku uzyskuje się następujący układ warunków ograniczających:

$$\left.\begin{array}{l}
x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12} - N_1 = 130 \\
x_1 \quad +x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12} - N_2 = 85 \\
x_1+x_2 \quad +x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12} - N_3 = 120 \\
x_1+x_2+x_3 \quad +x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12} - N_4 = 105 \\
x_1+x_2+x_3+x_4 \quad +x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12} - N_5 = 110
\end{array}\right\} \quad /8/$$

$$\left.\begin{array}{l}
x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \quad +x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12} - N_6 = 120 \\
x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \quad +x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12} - N_7 = 80 \\
x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 \quad +x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12} - N_8 = 70 \\
x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8 \quad +x_{10}+x_{11}+x_{12} - N_9 = 100 \\
x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9 \quad +x_{11}+x_{12} - N_{10} = 115 \\
x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10} \quad +x_{12} - N_{11} = 125 \\
x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11} \quad - N_{12} = 140
\end{array}\right\} \text{/8/ c.d.}$$

Funkcja celu stanowiąca sumę obecności wszystkich pracowników w osobo-miesiącach, podlegająca minimalizacji, przedstawia się następująco:

$$F = 11x_1+11x_2+11x_3+11x_4+11x_5+11x_6+11x_7+11x_8+11x_9+11x_{10}+ +11x_{11}+11x_{12} \longrightarrow \min \qquad \text{/9a/}$$

Zamiast tej postaci funkcji celu można przyjąć następującą uproszczoną postać tej funkcji, stanowiącą stan wszystkich zatrudnionych w tym zakładzie pracowników, przez podzielenie funkcji F /w osobo-miesiącach/ przez 11 miesięcy:

$$F' = \frac{1}{11} F = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12} \longrightarrow \min \qquad \text{/9b/}$$

Zamiast funkcji celu ujętej wzorami /9a/ lub /9b/ można - z tym samym skutkiem - minimalizować sumę nadmiarów pracowników obecnych w pracy ponad niezbędny stan pracowników:

Tablica 9

Wyjściowa tablica simpleks dla przykładu optymalnego rozkładu urlopów w ciągu miesięcy roku

													1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9	N_{10}	N_{11}	N_{12}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	
s_1	-1													1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	130
s_2		-1											1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	85
s_3			-1										1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	120
s_4				-1									1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	105
s_5					-1								1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	110
s_6						-1							1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	120
s_7							-1						1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	80
s_8								-1					1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	70
s_9									-1				1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	100
s_{10}										-1			1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	115
s_{11}											-1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	125
s_{12}												-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		140

$$F'' = N_1+N_2+N_3+N_4+N_5+N_6+N_7+N_8+N_9+N_{10}+N_{11}+N_{12} \longrightarrow \min \qquad /10/$$

Tak więc ostatecznie model matematyczny optymalnego rozkładu urlopów w przyjętym przykładzie składa się z funkcji celu według wzoru /9b/ lub /10/, która ma osiągnąć wartość minimalną, oraz z ograniczeń, ujętych układem równań /8/.

Model matematyczny ujęty w postaci tablicy simpleks przedstawiony jest w tabl. 9.

4.3. Rozwiązanie przykładu

Model matematyczny przedstawiony w rozdz. 4.2 i pokazany w tabl. 9 rozwiązuje się za pomocą algorytmu simpleks.

Rozwiązanie uzyskano po 17 iteracjach.

Uzyskano następujące rozwiązanie:

$x_1 = 10$	$N_2 = 55$
$x_5 = 30$	$N_3 = 20$
$x_8 = 20$	$N_4 = 35$
$x_9 = 40$	$N_6 = 20$
$x_{10} = 25$	$N_7 = 60$
$x_{11} = 15$	$N_8 = 50$

Rozwiązanie to oznacza, że 10 pracowników powinno otrzymać urlop w styczniu, 30 pracowników - w maju, 20 pracowników - w sierpniu itd.; z wartości N_i według tego rozwiązania wynika, że według uzyskanego rozwiązania wystąpią nadmiary stanu obecnych pracowników ponad ich niezbędną liczbę: w lutym 55 pracowników, w marcu 20 pracowników, w kwietniu 35 pracowników itd.

Uzyskane rozwiązanie spełnia układ warunków ograniczających /8/, co łatwo sprawdzić:

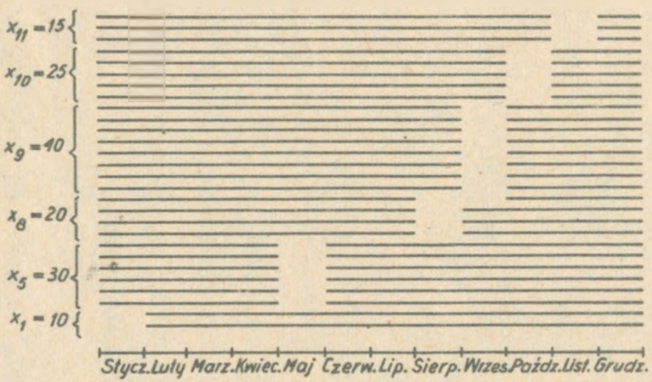
$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr}
 & & 30 & + & 20 & + & 40 & + & 25 & + & 15 & & & = & 130 \\
10 & + & 30 & + & 20 & + & 40 & + & 25 & + & 15 & - & 55 & = & 85 \\
10 & + & 30 & + & 20 & + & 40 & + & 25 & + & 15 & - & 20 & = & 120 \\
10 & + & 30 & + & 20 & + & 40 & + & 25 & + & 15 & - & 35 & = & 105 \\
10 & & & + & 20 & + & 40 & + & 25 & + & 15 & & & = & 110 \\
10 & + & 30 & + & 20 & + & 40 & + & 25 & + & 15 & - & 20 & = & 120 \\
10 & + & 30 & + & 20 & + & 40 & + & 25 & + & 15 & - & 60 & = & 80 \\
10 & + & 30 & & & + & 40 & + & 25 & + & 15 & - & 50 & = & 70 \\
10 & + & 30 & + & 20 & & & + & 25 & + & 15 & & & = & 100 \\
10 & + & 30 & + & 20 & + & 40 & & & + & 15 & & & = & 115 \\
10 & + & 30 & + & 20 & + & 40 & + & 25 & & & & & = & 125 \\
10 & + & 30 & + & 20 & + & 40 & + & 25 & + & 15 & & & = & 140
\end{array}
$$

Suma wszystkich pracowników wynosi $F' = 140$, a suma nadmiarów $F'' = 240$ i są to możliwie najmniejsze wartości dla wszystkich możliwych rozwiązań niniejszego przykładu rozkładu urlopów.

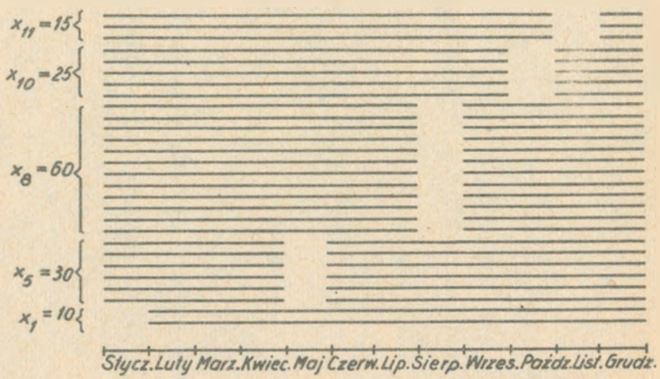
Rozwiązanie to jest przedstawione po lewej stronie rys. 2.

Oprócz przedstawionego wyżej rozwiązania – z ostatecznej tablicy simpleks /której tu się nie przytacza/ wynika, że istnieje 10 równoważnych pod względem wartości funkcji celu rozwiązań.

Wydaje się, że spośród tych łącznie 11 rozwiązań najatrakcyjniejsze jest to, według którego maksymalna licz-



Liczba prac. obecnych	130	140	140	140	110	140	140	120	100	115	125	140
Liczba prac. niezbędnych	130	85	120	105	110	120	80	70	100	115	125	140
Nadwyżka		55	20	35		20	60	50				



130	140	140	140	110	140	140	80	140	115	125	140
130	85	120	105	110	120	80	70	100	115	125	140
	55	20	35		20	60	10	40			

Jedna kreska oznacza 5 pracowników

Rys. 2. Rozwiązanie przykładu optymalnego rozkładu urlopów w ciągu miesięcy roku ła pracowników otrzymuje urlop w miesiącach letnich /w lipcu i w sierpniu/:

$$x_7 + x_8 \longrightarrow \max$$

czyli innymi słowy, według którego występuje minimalna wartość nadwyżki stanu pracowników ponad ich niezbędną liczbę w tych obu miesiącach:

$$N_7 + N_8 \longrightarrow \min$$

Tą cechą spośród 11 optymalnych rozwiązań modelu przedstawionego w rozdz. 4.2 charakteryzuje się następujące rozwiązanie:

$x_1 = 10$	$N_2 = 55$
$x_5 = 30$	$N_3 = 20$
$x_8 = 60$	$N_4 = 35$
$x_{10} = 25$	$N_6 = 20$
$x_{11} = 15$	$N_7 = 60$
	$N_8 = 10$
	$N_9 = 40$

Rozwiązanie to oznacza, że 10 pracowników powinno otrzymać urlop w styczniu, 30 - w maju, 60 - w sierpniu itd. Jednocześnie wystąpią nieuniknione nadwyżki stanu pracowników: w lutym 55 pracowników, w marcu 20 pracowników, w kwietniu 35 pracowników itd.

Można łatwo sprawdzić, że powyższe rozwiązanie również spełnia układ równań /8/ i również według tego rozwiązania uzyskuje się tę samą wartość funkcji celu F' =

= 140 /suma wszystkich zatrudnionych pracowników/ i F''= = 240.

Rozwiązanie to jest przedstawione w prawej części rys. 2.

5. PRZYKŁAD DLA ROZKŁADU ZMIAN W CIĄGU GODZIN DOBY

5.1. Dane wyjściowe przykładu

Poniższy przykład może dotyczyć np. dobowego rozkładu pracy telefonistek centrali międzymiastowej.

Rozkład niezbędnej liczby telefonistek w ciągu godzin doby przedstawia się następująco /nie uwzględnia się tu pory nocnej od godz. 24^{00} do godz. 8^{00}/:

Godziny zegarowe	Indeks kolejnej godziny	Niezbędna liczba telefonistek
1	2	3
8^{00} - 9^{00}	1	7
9^{00} - 10^{00}	2	48
10^{00} - 11^{00}	3	45
11^{00} - 12^{00}	4	42
12^{00} - 13^{00}	5	39
13^{00} - 14^{00}	6	38
14^{00} - 15^{00}	7	30
15^{00} - 16^{00}	8	32

1	2	3
$16^{00} - 17^{00}$	9	28
$17^{00} - 18^{00}$	10	22
$18^{00} - 19^{00}$	11	24
$19^{00} - 20^{00}$	12	27
$20^{00} - 21^{00}$	13	32
$21^{00} - 22^{00}$	14	35
$22^{00} - 23^{00}$	15	13
$23^{00} - 24^{00}$	16	6

Przyjmijmy następujące warunki, wynikające z regulaminu pracy, ograniczające swobodę opracowania rozkładu zmian:

- telefonistka ma mieć w ciągu doby nieprzerwany czas pracy,
- liczba godzin pracy w danym dniu dla dowolnej telefonistki może wynosić tylko albo 5, albo 6, albo 7 godzin /rozumie się, że rozkład miesięczny zapewni wykorzystanie miesięcznej liczby godzin pracy dla każdego pracownika oddzielnie/,
- zmiana nie może zaczynać się ani kończyć w godz. 24^{00} – 8^{00}.

5.2. Model matematyczny dla optymalizacji zagadnienia

Jako zmienną $x_{i,j}$ przyjmijmy liczbę telefonistek rozpoczynających pracę z początkiem i-tej godziny /według indeksu kolejnej godziny/ i których zmiana trwa j godzin. Np. $x_{3,6}$ oznacza liczbę telefonistek, które rozpoczynają pracę na początku 3. godziny /tzn. według zegara o godz. 10^{00}/ i które w tym dniu pracują 6 godzin /kończą pracę według zegara o godz. 16^{00}/.

Ponadto przez N_i oznaczmy dla i-tej godziny nadmiar stanu obecnych telefonistek ponad ich niezbędną liczbę.

Dla każdej godziny oddzielnie zestawia się stan obecnych telefonistek i porównuje się go z ich niezbędną liczbą - uzyskując zbiór warunków modelu matematycznego /tabl. 10/.

Na przykład dla pierwszej godziny, i = 1 /według zegara od 8^{00} do 9^{00}/ obecne są telefonistki, które stawiły się do pracy na początku pierwszej godziny i mają pracować 5, 6 i 7 godzin. Stan obecnych telefonistek ma wynosić dla pierwszej godziny co najmniej 7, a więc uzyskuje się równanie:

$$x_{1,5} + x_{1,6} + x_{1,7} - N_1 = 7$$

Na przykład dla siódmej godziny, i = 7 /według zegara od 14^{00} do 15^{00}/ obecne są telefonistki, które przyszły w pierwszej godzinie na 7 godzin, które przyszły w drugiej godzinie na 6 i 7 godzin oraz wszystkie, które przyszły w trzeciej, czwartej, piątej, szóstej i siódmej

Tablica 10

Model matematyczny dla optymalnego rozkładu zmian personelu w ciągu godzin doby

Zminimalizować funkcję celu:

$$F = 5x_{1,5}+6x_{1,6}+7x_{1,7}+5x_{2,5}+6x_{2,6}+7x_{2,7}+5x_{3,5}+6x_{3,6}+7x_{3,7}+5x_{4,5}+6x_{4,6}+7x_{4,7}+5x_{5,5}+6x_{5,6}+7x_{5,7}+$$
$$+5x_{6,5}+6x_{6,6}+7x_{6,7}+5x_{7,5}+6x_{7,6}+7x_{7,7}+5x_{8,5}+6x_{8,6}+7x_{8,7}+5x_{9,5}+6x_{9,6}+7x_{9,7}+5x_{10,5}+6x_{10,6}+7x_{10,7}+$$
$$+5x_{11,5}+6x_{11,6}+5x_{12,5} \longrightarrow \min$$

lub funkcję celu: $F' = N_1+N_2+N_3+N_4+N_5+N_6+N_7+N_8+N_9+N_{10}+N_{11}+N_{12}+N_{13}+N_{14}+N_{15}+N_{16} \longrightarrow \min$

przy następujących ograniczeniach:

$x_{1,5}+x_{1,6}+x_{1,7} - N_1 = 7$

$x_{1,5}+x_{1,6}+x_{1,7}+x_{2,5}+x_{2,6}+x_{2,7} - N_2 = 48$

$x_{1,5}+x_{1,6}+x_{1,7}+x_{2,5}+x_{2,6}+x_{2,7}+x_{3,5}+x_{3,6}+x_{3,7} - N_3 = 45$

$x_{1,5}+x_{1,6}+x_{1,7}+x_{2,5}+x_{2,6}+x_{2,7}+x_{3,5}+x_{3,6}+x_{3,7}+x_{4,5}+x_{4,6}+x_{4,7} - N_4 = 42$

$x_{1,5}+x_{1,6}+x_{1,7}+x_{2,5}+x_{2,6}+x_{2,7}+x_{3,5}+x_{3,6}+x_{3,7}+x_{4,5}+x_{4,6}+x_{4,7}+x_{5,5}+x_{5,6}+x_{5,7} - N_5 = 39$

$x_{1,6}+x_{1,7}+x_{2,5}+x_{2,6}+x_{2,7}+x_{3,5}+x_{3,6}+x_{3,7}+x_{4,5}+x_{4,6}+x_{4,7}+x_{5,5}+x_{5,6}+x_{5,7}+x_{6,5}+x_{6,6}+x_{6,7} - N_6 = 38$

$x_{1,7}+x_{2,6}+x_{2,7}+x_{3,5}+x_{3,6}+x_{3,7}+x_{4,5}+x_{4,6}+x_{4,7}+x_{5,5}+x_{5,6}+x_{5,7}+x_{6,5}+x_{6,6}+x_{6,7}+x_{7,5}+x_{7,6}+x_{7,7} - N_7 = 30$

$x_{2,7}+x_{3,6}+x_{3,7}+x_{4,5}+x_{4,6}+x_{4,7}+x_{5,5}+x_{5,6}+x_{5,7}+x_{6,5}+x_{6,6}+x_{6,7}+x_{7,5}+x_{7,6}+x_{7,7}+x_{8,5}+x_{8,6}+x_{8,5} - N_8 = 32$

$x_{3,7}+x_{4,6}+x_{4,7}+x_{5,5}+x_{5,6}+x_{5,7}+x_{6,5}+x_{6,6}+x_{6,7}+x_{7,5}+x_{7,6}+x_{7,7}+x_{8,5}+x_{8,6}+x_{8,7}+x_{9,5}+x_{9,6}+x_{9,7} - N_9 = 28$

$x_{4,7}+x_{5,6}+x_{5,7}+x_{6,5}+x_{6,6}+x_{6,7}+x_{7,5}+x_{7,6}+x_{7,7}+x_{8,5}+x_{8,6}+x_{8,7}+x_{9,5}+x_{9,6}+x_{9,7}+x_{10,5}+x_{10,6}+x_{10,7} - N_{10} = 22$

$x_{5,7}+x_{6,6}+x_{6,7}+x_{7,5}+x_{7,6}+x_{7,7}+x_{8,5}+x_{8,6}+x_{8,7}+x_{9,5}+x_{9,6}+x_{9,7}+x_{10,5}+x_{10,6}+x_{10,7}+x_{11,5}+x_{11,6} - N_{11} = 24$

$x_{6,7}+x_{7,6}+x_{7,7}+x_{8,5}+x_{8,6}+x_{8,7}+x_{9,5}+x_{9,6}+x_{9,7}+x_{10,5}+x_{10,6}+x_{10,7}+x_{11,5}+x_{11,6}+x_{12,5} - N_{12} = 27$

$x_{7,7}+x_{8,6}+x_{8,7}+x_{9,5}+x_{9,6}+x_{9,7}+x_{10,5}+x_{10,6}+x_{10,7}+x_{11,5}+x_{11,6}+x_{12,5} - N_{13} = 32$

$x_{8,7}+x_{9,6}+x_{9,7}+x_{10,5}+x_{10,6}+x_{10,7}+x_{11,5}+x_{11,6}+x_{12,5} - N_{14} = 35$

$x_{9,7}+x_{10,6}+x_{10,7}+x_{11,5}+x_{11,6}+x_{12,5} - N_{15} = 13$

$x_{10,7}+x_{11,6}+x_{12,5} - N_{16} = 6$

godzinie. Stan ten nie może być mniejszy niż 30. Warunek ten wyraża siódme z kolei równanie modelu /tabl.10/.

W analogiczny sposób zostały zestawione wszystkie 16 równań modelu.

Należy zwrócić uwagę na przyjęte z regulaminu założenie, że telefonistki nie mogą kończyć pracy później niż o godz. 24^{00}. Wynika z tego, że telefonistki pracujące 5 godzin mogą przychodzić do pracy najpóźniej o godz. 19^{00}, czyli w dwunastej godzinie według przyjętej numeracji /jest to zmienna $x_{12,5}$/, telefonistki pracujące 6 godzin mogą przychodzić najpóźniej o godz. 18^{00} /$x_{11,6}$/ i telefonistki pracujące 7 godzin - o godz. 17^{00} /$x_{10,7}$/. Powoduje to, że w modelu matematycznym nie wystąpiły takie zmienne, jak $x_{11,7}$, $x_{12,6}$, $x_{13,5}$ itd.

Łącznie model matematyczny dla tego przykładu składa się z 33 zmiennych typu $x_{i,j}$ i z 16 zmiennych typu N_i oraz zawiera 16 warunków ograniczających.

W tablicy 10 funkcja celu przedstawiona jest w dwu ujęciach: można minimalizować łączną sumę godzin pracy /obecności/ wszystkich telefonistek, mnożąc ich liczbę przez odpowiednie ilości godzin pracy - lub można minimalizować sumę nadmiarów stanu obecności ponad niezbędne potrzeby.

5.3. Rozwiązanie przykładu

Model matematyczny przedstawiony w tabl. 10 został rozwiązany za pomocą algorytmu simpleks. Ręczne rozwiązanie takiego modelu /o rozmiarze 65 x 16/ jest już dość żmudne.

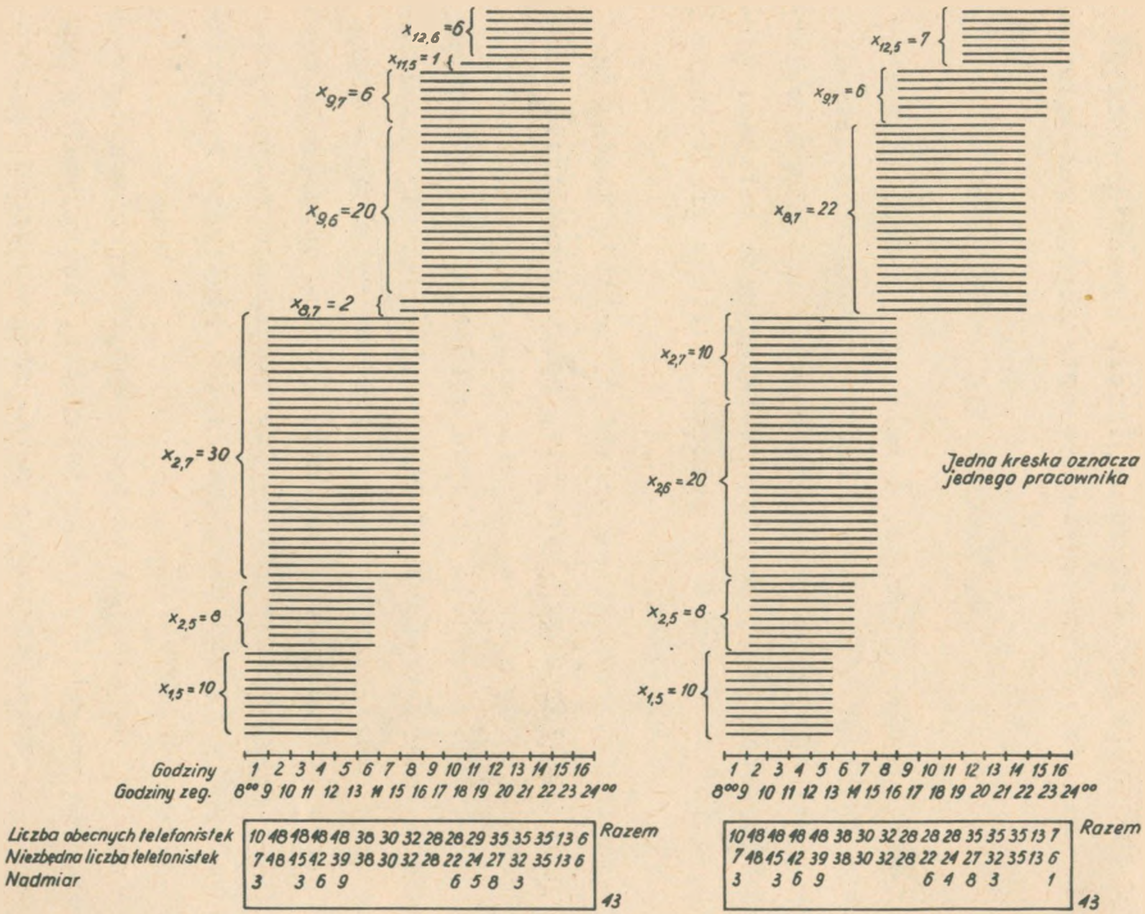
Po przeprowadzeniu procesu iteracyjnego /w 18 krokach/ z ostatniej tablicy simpleks okazało się, że optymalne rozwiązanie posiada warianty, równorzędne pod względem wartości funkcji celu. Dwa z tych wariantów zostały przedstawione poniżej.

I wariant		II wariant	
$x_{1,5} = 10$	$N_1 = 3$	$x_{1,5} = 10$	$N_1 = 3$
$x_{2,5} = 8$	$N_3 = 3$	$x_{2,5} = 8$	$N_3 = 3$
$x_{2,7} = 30$	$N_4 = 6$	$x_{2,6} = 20$	$N_4 = 6$
$x_{8,7} = 2$	$N_5 = 9$	$x_{2,7} = 10$	$N_5 = 9$
$x_{9,6} = 20$	$N_{10} = 6$	$x_{8,7} = 22$	$N_{10} = 6$
$x_{9,7} = 6$	$N_{11} = 5$	$x_{9,7} = 6$	$N_{11} = 4$
$x_{11,5} = 1$	$N_{12} = 8$	$x_{12,5} = 7$	$N_{12} = 8$
$x_{12,5} = 6$	$N_{13} = 3$		$N_{13} = 3$
			$N_{16} = 1$

Na przykład I wariant rozwiązania oznacza, że 10 telefonistek ma rozpocząć pracę w pierwszej godzinie /tzn. o godz. 8^{00} według zegara/ i pracować 5 godzin, 8 telefonistek ma rozpocząć pracę w drugiej godzinie /tzn. o 9^{00}/ i pracować 5 godzin, 30 telefonistek ma rozpocząć pracę w drugiej godzinie i pracować 7 godzin itd.

Całość rozwiązania /w dwóch wybranych wariantach/ jest przedstawiona graficznie na rys. 3.

Wartość funkcji celu dla optymalnych rozwiązań wyno-



Rys. 3. Rozwiązanie przykładu dla rozkładu zmian personelu w ciągu godzin doby

si F = 511 roboczogodzin lub - jeśli oblicza się sumę nadmiarów stanu obecności ponad niezbędne potrzeby - F' = 43; takie wartości funkcji celu wypadają - oczywiście - dla wszystkich wariantów optymalnego rozwiązania.

6. ZAKOŃCZENIE

Z niniejszego artykułu, a zwłaszcza z rozwiązanych 3 praktycznych przykładów wynika, że zagadnienie optymalnych rozkładów zmian personelu w warunkach nierównomiernego natężenia pracy może być rozwiązywane metodami programowania liniowego i że posiada istotnie praktycznie optymalne rozwiązanie.

Oczywiście, rozwiązane przykłady zostały zbudowane dla dość teoretycznych warunków; np. w przykładzie dla rozkładu urlopów /rozdz. 4/ założono, że poszczególni pracownicy wykorzystują urlop w całości w ciągu pełnych miesięcy kalendarzowych. Jednak posługując się przedstawionymi w niniejszym artykule metodami można by - kosztem rozbudowania modelu matematycznego - uwzględnić również np. 2-tygodniowe urlopy lub uwzględnić rozpoczynanie urlopów w środku miesiąca /np. w odstępach tygodniowych lub 10-dniowych/.

Jednakże niezależnie od tych pewnych uproszczeń przedstawionych przykładów można twierdzić, że optymalne rozwiązania uzyskane za pomocą metod programowania liniowego nadają się do praktycznego wdrożenia w życie.

Wszystkie przykłady zawarte w artykule zostały rozwiązane ręcznie /nie bacząc na duży związany z tym nakład pracy/. Natomiast można uważać, że przyszłe praktyczne zastosowanie opisanych metod będzie wymagało użycia elektronicznych maszyn liczących, gdyż - jak wiadomo - algorytm simpleks należy do standardowego oprogramowania maszyn matematycznych.

Stosowanie maszyn liczących /w przyszłości elektronicznej maszyny liczącej w resorcie łączności/ umożliwi nie tylko bardziej masowe budowanie i rozwiązywanie problemów optymalnego rozkładu zmian personelu /gdyż do wykorzystania w tym celu maszyn liczących wcale nie jest potrzebna praktyczna znajomość algorytmu simpleks/, ale również wprowadzenie do budowanych modeli matematycznych takich warunków, które spowodują bardziej życiową przydatność uzyskiwanych rozwiązań.

WYKAZ LITERATURY

1. Barsuk W.A.: Primienienije liniejnogo programmirowanija w pocztowoj swiazi. Swiazizdat. Moskwa, 1963.
2. Goettner R. /red/: Entscheidungsmodelle im Post- und Fernmeldewesen. Mathematische Methoden im Betrieb und in der Oekonomik des Post- und Fernmeldewesen. Praca zbiorowa. Transpress. Berlin, 1965.
3. Dudziński Z.: Przegląd zastosowań metod optymalizacji matematycznej w poczcie /maszynopis/, Warszawa, maj 1966.
4. Sadowski W.: Teoria podejmowania decyzji. PWG. Warszawa, 1960.