Ustalona a preferowana kolejność ruchów w grze pojedynczej

Sylwester Laskowski

Przeanalizowano dwuosobowe gry o sumie niezerowej pod kątem preferowanej dla graczy kolejności ruchów, ich związku z faktem istnienia lub nieistnienia równowagi Nasha, związku z modelami gry Stackelberga oraz konieczności wykonywania ruchów w określonej kolejności.

teoria gier, gry rynkowe, kolejność ruchów, równowaga Nasha, gry Stackelberga, gra pojedyncza, gra podwójna

Wprowadzenie

Teoria gier – matematyczna teoria konfliktu i kooperacji – doczekała się licznych zastosowań [16, 18, 20]. Jednym z ciekawszych zagadnień (nie tylko praktycznych, ale i teoretycznych) jest próba opisania i rozwiązania, za pomocą właściwych dla niej narzędzi, problemów zaistniałych w sytuacjach o charakterze łączącym w sobie zarówno element **konfliktu**, sprzeczności interesów oraz dążeń, jak i element **kooperacji**, konieczności podejmowania współpracy i ustalania wspólnej strategii gry. Jednym z praktycznych przykładów tego typu sytuacji jest przypadek konkurencyjnej gry na rynku telekomunikacyjnym, gdzie podmioty biorące udział w grze, z jednej strony, konkurują o ograniczone zasoby (w szczególności o dostęp do ograniczonej liczby potencjalnych abonentów), a z drugiej – muszą nawiązywać współpracę w zakresie połączeń międzysieciowych, niezbędnych do zapewnienia własnym abonentom łączności z abonentami innego operatora [12]. Wnikliwa analiza tego typu sytuacji – przy nawet silnie upraszczających założeniach, że w grze bierze udział jedynie dwóch graczy (dwa przedsiębiorstwa telekomunikacyjne), którzy kierują się wyłącznie jednym kryterium oceny podjętych przez siebie decyzji (gra jednokryterialna), a przy tym traktują daną sytuację w grze jako unikatową, oderwaną od przyszłych, analogicznych sytuacji (gra jednokrotna) – pokazuje, że jest wiele szczegółowych zagadnień do rozważenia [9, 10, 12]. Analizie jednego z tych zagadnień poświęcono niniejszy artykuł.

Rozpatrywany jest przypadek gry rynkowej, w której bierze udział dwóch graczy: A i B. Strategie a_i gracza A odzwierciedlają świadczone przez niego usługi na rynku detalicznym (dla użytkowników końcowych) oraz związane z nimi ceny (ich konkretną wysokość). Strategie b_j obejmują usługi i związane z nimi ceny na rynku detalicznym gracza B. Usługi i związane z nimi ceny na rynku hurtowym (usługi świadczone w relacji międzyoperatorskiej) są reprezentowane przez strategie h_l. O ile na strategie na rynkach detalicznych gracze mają indywidualny wpływ (ustalają je w niezależny sposób), o tyle strategie na rynku hurtowym są ustalane w czasie negocjacji międzyoperatorskich, a więc wybór określonej strategii h_l zależy od decyzji obu graczy. Na potrzeby analizy zostanie przyjęte, że strategie h_l oznaczają decyzje hipotetycznego gracza H.

Gracze A i B oceniają swoje decyzje z punktu widzenia pojedynczego kryterium – funkcji wypłaty, może to być np. zysk, udział w rynku, czy dystrybucja ruchu w sieci. Wypłata (wartość funkcji wypłaty), jaką gracze otrzymują, jest rezultatem podjęcia odpowiednich decyzji na rynkach detalicznych: a_i oraz b_j, jak też i na rynku hurtowym h_l. W rezultacie ustalenia strategii a_i, b_j i h_l gracz A

otrzymuje wypłatę $V_{jl}^{A}(a_i)$, natomiast gracz B wypłatę $V_{il}^{B}(b_j)$. Wynik gry jest określony parą wypłat $[V_{jl}^{A}(a_i), V_{il}^{B}(b_j)]$. Obaj gracze znają nawzajem swoje macierze wypłat, jak również cel, do jakiego dążą. Ponadto zostanie przyjęte, że obaj gracze dążą wyłącznie do maksymalizacji własnej funkcji wypłaty[①].

Ruchy poszczególnych graczy są reprezentowane przez procesy ustalania cen na odpowiednich rynkach:

- $\mathcal{A}$ – proces ustalania cen na rynku detalicznym gracza A;
- $\mathcal{B}$ – proces ustalania cen na rynku detalicznym gracza B;
- $\mathcal{H}$ – proces negocjacji stawek rozliczeniowych między graczami A i B (ruch hipotetycznego gracza H).

Zakłada się, że procesy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{H}$ są rozłączne, a kolejność ruchów jest ustalona.

Sytuację, w której żaden z procesów nie dobiegł końca, określa się mianem **gry podwójnej** [9, 10]. Sytuację, w której jeden z graczy (A, B lub H) ustalił już swoje ceny (wybrał określoną strategię gry), określa się mianem **gry pojedynczej**. Gra przebiega więc dwufazowo. W pierwszej fazie jest rozgrywana gra podwójna, natomiast w drugiej – gra pojedyncza. Określona gra pojedyncza jest zatem rezultatem rozegrania gry podwójnej w określony sposób.

Na potrzeby analizy zostanie przyjęta konwencja uporządkowywania wypłat graczy w formie tzw. **macierzy wypłat**. W tablicy 1 przedstawiono przykładową macierz wypłat w grze podwójnej. Każdy z graczy (A, B i H) ma tu do wyboru po trzy strategie.

Tabl. 1. Przykładowe macierze wypłat w grze podwójnej przy wyborze strategii h_1, h_2, h_3

Strategie	h_1			Strategie	h_2			Strategie	h_3		
	b_1	b_2	b_3		b_1	b_2	b_3		b_1	b_2	b_3
a_1	$[2,3]$	$[3,1]$	$[1,4]$	a_1	$[1,2]$	$[2,3]$	$[3,2]$	a_1	$[2,5]$	$[3,4]$	$[4,3]$
a_2	$[2,2]$	$[5,3]$	$[3,5]$	a_2	$[5,2]$	$[4,3]$	$[4,4]$	a_2	$[1,1]$	$[2,5]$	$[2,5]$
a_3	$[3,2]$	$[3,4]$	$[4,2]$	a_3	$[2,3]$	$[3,2]$	$[2,3]$	a_3	$[3,3]$	$[3,2]$	$[2,3]$

Jeśli w tej grze pierwszym ruchem będą negocjacje cen na rynku hurtowym $\mathcal{H}$, które zakończą się wyborem strategii h_1 (ustaleniem określonego przez tę strategię zakresu usług i odpowiadających im cen), wówczas gra pojedyncza, w której biorą udział gracze A i B, będzie opisana taką macierzą wypłat, jak w tablicy 2.

① *W praktyce wartości funkcji wypłaty uzyskuje się na podstawie analizy konkretnych modeli popytu na świadczone usługi, modelu kosztu oraz ogólnego modelu architektury sieci. Gracze (przedsiębiorstwa telekomunikacyjne) nie zawsze muszą dążyć do maksymalizacji wartości kryterium, które przyjmują za miarę oceny podjętych decyzji. Gracze równie dobrze mogą dążyć do minimalizacji, czy stabilizacji tych wartości. W takich przypadkach należy te kryteria przekształcić do postaci maksymalizowanej, nie jest to trudne zagadnienie [8]. Ogólniejszy natomiast będzie przypadek, w którym gracze dążą zarówno do maksymalizacji własnej funkcji wypłaty (cel indywidualnie efektywny), jak i do minimalizacji funkcji wypłaty drugiego gracza (cel antagonistyczny).*

Tabl. 2. Macierz wypłat w grze pojedynczej

Strategie	b_1	b_2	b_3
a_1	$[2,3]$	$[3,1]$	$[1,4]$
a_2	$[2,2]$	$[5,3]$	$[3,5]$
a_3	$[3,2]$	$[3,4]$	$[4,2]$

Jeśli w rezultacie jej rozegrania gracz A, wykonujący ruch jako pierwszy, wybierze, np. strategię a_3, natomiast gracz B odpowie strategią b_2, wówczas ustali się wynik $[V_{21}^A(a_3), V_{31}^B(b_2)] = [3,4]$.

Preferowana kolejność ruchów w grze pojedynczej

Przyjęta jako ustalona kolejność ruchów w grze nie jest bynajmniej dla graczy bez znaczenia. Wykazane to zostanie na przykładzie gry pojedynczej.

Rozpatrzona zostanie gra z macierzą wypłat jak w tablicy 3. W tej grze obaj gracze A i B, dążący do maksymalizacji własnej funkcji wypłaty, chcieliby móc wykonać ruch jako pierwszy. Jeśli pierwszy wykona ruch gracz A, wówczas wybierze strategię a_2, co w rezultacie odpowiedzi b_2 gracza B ustali wynik $[3,2]$. Gdyby jednak gracz B wykonywał ruch jako pierwszy, wówczas wybrałby strategię b_1, co w rezultacie odpowiedzi a_1 gracza A ustaliłoby wynik $[2,3]$. A zatem dla obu graczy jest korzystnie ruszyć się jako pierwszy.

Tabl. 3. Macierz wypłat w grze pojedynczej z preferencją pierwszego

Strategie	b_1	b_2
a_1	$[2,3]$	$[1,1]$
a_2	$[1,1]$	$[3,2]$

Sytuacja będzie już inna, gdy macierz wypłat w grze pojedynczej będzie jak w tablicy 4. W tym przypadku obu graczom opłaca się ruszyć jako drugi. Jeśli pierwszy ruszy się gracz A, wówczas – niezależnie od tego, czy wybierze strategię a_1 czy a_2 – ustali się wynik $[2,3]$. Jeśli pierwszy ruszy się gracz B, wówczas – niezależnie od tego, czy wybierze strategię b_1 czy b_2 – ustali się wynik $[3,2]$. Każdy z graczy otrzymuje więc większą wypłatę wówczas, gdy rusza się jako drugi.

Tabl. 4. Macierz wypłat w grze pojedynczej z preferencją drugiego

Strategie	b_1	b_2
a_1	$[2,3]$	$[3,2]$
a_2	$[3,2]$	$[2,3]$

Zakładając, że żaden z graczy nie ma strategii niejednoznacznych, czyli takich, które prowadzą do jednakowej wypłaty dla gracza, który tę strategię ma, jednakże do innych wypłat dla drugiego gracza, można wprowadzić następujące definicje.

Definicja 1. *Dla gracza A jest korzystnie ruszyć się jako pierwszy, wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$V^A_{j''}(a_{i'}) > V^A_{j'}(a_{i''}).$$

Dla gracza A jest korzystnie ruszyć się jako drugi, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$V^A_{j''}(a_{i'}) < V^A_{j'}(a_{i''}),$$

gdzie:

- i' – *indeks optymalnej strategii gracza A, gdy rusza się on jako pierwszy;*
- j'' – *indeks strategii racjonalnej odpowiedzi gracza B;*
- j' – *indeks optymalnej strategii gracza B, gdy rusza się on jako pierwszy;*
- i'' – *indeks strategii racjonalnej odpowiedzi gracza A.*

Użyte w tej definicji pojęcie **optymalnej strategii** gracza A oznacza taką strategię a_i, która z uwzględnieniem najkorzystniejszej z punktu widzenia gracza B odpowiedzi (strategii $\hat{b}(a_i)$) da graczowi A najlepszą możliwą wypłatę: $a_i = \hat{a} = \arg\max_i V^A_{\hat{j}}(a_i)$. Natomiast pojęcie racjonalnej odpowiedzi gracza wprowadzono w celu zachowania ogólności rozważań. O ile bowiem pojęcie **optymalnej odpowiedzi** odnosiłoby się wyłącznie do oceny z punktu widzenia wartości wypłaty, jaką otrzymuje dany gracz (ten, który odpowiada), o tyle pojęcie **racjonalnej odpowiedzi** zawiera w sobie również możliwość formułowania celów nie tylko optymalnych (jak przyjęta tu maksymalizacja własnej funkcji wypłaty), ale także celów antagonistycznych, mierzących bezpośrednio w pogorszenie wartości wypłaty drugiego gracza lub ukształtowanie odpowiedniej różnicy między własną wypłatą a wypłatą drugiego gracza [9, 10].

Analogiczną definicję można sformułować dla gracza B.

Sytuacja występująca w przypadku gier z macierzą wypłat jak w tablicach 3 i 4, gdy dla obu graczy było korzystnie ruszyć się jako pierwszy lub jako drugi, nie jest przypadkowa. W istocie – poza przypadkami niejednoznaczności strategii, co omówiono w dalszej części artykułu – preferencje obu graczy odnośnie do optymalnej kolejności ruchów są zawsze przeciwstawne: jeśli dla gracza A jest korzystnie ruszyć się jako pierwszy, to również dla gracza B jest korzystnie ruszyć się jako pierwszy; jeśli dla gracza A jest korzystnie ruszyć się jako drugi, to także dla gracza B jest korzystnie ruszyć się jako drugi. Prawdziwe są bowiem poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 1. *Dla gracza A jest korzystnie ruszyć się jako pierwszy, wtedy i tylko wtedy, gdy również dla gracza B jest korzystnie ruszyć się jako pierwszy:*

$$V^A_{j''}(a_{i'}) > V^A_{j'}(a_{i''}) \iff V^B_{i''}(b_{j'}) > V^B_{i'}(b_{j''}),$$

gdzie:

- i' – *indeks optymalnej strategii gracza A, gdy rusza się on jako pierwszy;*
- j'' – *indeks strategii racjonalnej odpowiedzi gracza B;*
- j' – *indeks optymalnej strategii gracza B, gdy rusza się on jako pierwszy;*
- i'' – *indeks strategii racjonalnej odpowiedzi gracza A.*

Dowód. Założenie, że dla gracza A jest korzystnie ruszyć się jako pierwszy (wybrać strategię $a_{i'}$), jest równoznaczne ze stwierdzeniem, że wartość wypłaty ($V^A_{j''}(a_{i'})$), jaką w wyniku racjonalnej odpowiedzi ($b_{j''}$) gracza B (maksymalizujacej wypłatę $V^B_{i'}(b_j)$) otrzyma gracz A, jest lepsza od tej ($V^A_{j'}(a_{i''})$), jaką otrzymałby, gdyby gracz B, znający racjonalne odpowiedzi gracza A ($a_{i''}$), ruszał się jako pierwszy ($b_{j'}$). Zachodzi więc zależność:

$$V^A_{j''}(a_{i'}) > V^A_{j'}(a_{i''}).$$

Fakt, że gracz B w sytuacji ruszania się jako pierwszy wybrałby strategię inną niż $b_{j''}$ ($b_{j'} \neq b_{j''}$), oznacza, poza przypadkami niejednoznaczności, że wartość wypłaty w przypadku ruszania się jako pierwszy ($V^B_{i''}(b_{j'})$) jest dla niego lepsza, niż w przypadku ruszania się jako drugi. Stąd:

$$V^B_{i''}(b_{j'}) > V^B_{i'}(b_{j''}).$$

Dowód drugiej strony implikacji jest analogiczny. Założenie, że dla gracza B jest korzystnie ruszyć się jako pierwszy (wybrać strategię $b_{j'}$), jest równoznaczne ze stwierdzeniem, że wartość wypłaty ($V^B_{i''}(b_{j'})$), jaką w wyniku racjonalnej odpowiedzi ($a_{i''}$) gracza A (maksymalizujacej wypłatę $V^A_{j'}(a_i)$) otrzyma gracz B, jest lepsza od tej ($V^B_{i'}(b_{j''})$), jaką otrzymałby, gdyby gracz A, znający racjonalne odpowiedzi gracza B ($b_{j''}$), ruszał się jako pierwszy ($a_{i'}$). Zachodzi więc zależność:

$$V^B_{i''}(b_{j'}) > V^B_{i'}(b_{j''}).$$

Fakt, że gracz A w sytuacji ruszania się jako pierwszy wybrałby strategię inną niż $a_{i''}$ ($a_{i'} \neq a_{i''}$), oznacza, że wartość wypłaty w przypadku ruszania się jako pierwszy ($V^A_{j''}(a_{i'})$) jest dla niego – poza przypadkami niejednoznaczności – lepsza, niż w przypadku ruszania się jako drugi. Stąd:

$$V^A_{j''}(a_{i'}) > V^A_{j'}(a_{i''}).$$ ■

Twierdzenie 2. *Poza przypadkami niejednoznaczności – dla gracza A jest korzystnie ruszyć się jako drugi, wtedy i tylko wtedy, gdy również dla gracza B jest korzystnie ruszyć się jako drugi:*

$$V^A_{j''}(a_{i'}) < V^A_{j'}(a_{i''}) \iff V^B_{i''}(b_{j'}) < V^B_{i'}(b_{j''}).$$

Dowód. Dowód jest analogiczny jak w przypadku twierdzenia 1. ■

Przy założeniu, że obaj gracze znają swoje macierze wypłat[①] oraz cel, do jakiego zmierzają, można wprowadzić następujące definicje.

Definicja 2. *Gra z preferencją pierwszego jest to gra, w której – w sytuacji, gdy obaj gracze znają nawzajem swoje macierze wypłat i cel, do jakiego dążą – dla obu graczy jest korzystnie ruszyć się jako pierwszy.*

① *W przypadku gdy jeden z graczy nie zna macierzy wypłat drugiego gracza, twierdzenia 1 i 2 nie muszą być prawdziwe [9].*

Definicja 3. *Gra z preferencją drugiego jest to gra, w której – w sytuacji, gdy obaj gracze znają nawzajem swoje macierze wypłat i cel, do jakiego dążą – dla obu graczy jest korzystnie ruszyć się jako drugi.*

W powyższych definicjach systematycznie było czynione założenie braku niejednoznaczności strategii graczy. Może jednak być taki przypadek, że dla jednego z graczy nie ma znaczenia, którą z rozważanych strategii wybierze, każda bowiem będzie mu dawała jednakowo dobrą wartość wypłaty.

Tabl. 5. Macierz wypłat w grze pojedynczej z jednostronną preferencją drugiego

Strategie	b_1	b_2
a_1	$[2,2]$	$[3,2]$
a_2	$[3,2]$	$[2,2]$

Będzie tak, dla przykładu, w grze z macierzą wypłat jak w tablicy 5. W przypadku tej gry strategie b_1 i b_2 są dla gracza B niejednoznaczne. Niezależnie od tego, jaką strategię wybierze gracz A, gracz B i tak otrzyma wypłatę równą 2. Kolejność ruchów nie ma więc dla niego znaczenia. Ma natomiast znaczenie dla gracza A. Ruszając się jako pierwszy, niezależnie od tego, którą ze strategii a_i gracz A wybierze, jego wypłata może przyjąć wartość zarówno 2, jak i 3. W interesie gracza A jest zatem ruszyć się jako drugi. Jeśli gracz B wybrałby strategię b_1, gracz A odpowiedziałby strategią a_2, jeśli natomiast gracz B wybrałby strategię b_2, gracz A odpowiedziałby strategią a_1. W obu przypadkach gracz A otrzyma wypłatę równą 3.

Można więc wprowadzić następującą definicję.

Definicja 4. *Gra z jednostronną preferencją drugiego jest to gra, w której – w sytuacji, gdy obaj gracze znają nawzajem swoje macierze wypłat i cel, do jakiego dążą – dla jednego z graczy jest korzystnie ruszyć się jako drugi, a dla drugiego gracza kolejność ruchów nie ma znaczenia.*

Warto zauważyć, że nie ma sensu wprowadzanie pojęcia **gry z jednostronną preferencją pierwszego**. Gra taka musiałaby być zdefiniowana jako gra, w której – w sytuacji, gdy obaj gracze znają nawzajem swoje macierze wypłat i cel, do jakiego dążą – dla jednego z graczy jest korzystnie ruszyć się jako pierwszy, a dla drugiego gracza kolejność ruchów nie ma znaczenia. O korzyści z ruchu jako pierwszy jest sens mówić wówczas, gdy z punktu widzenia danego gracza warto uprzedzić ruch drugiego gracza, aby w ten sposób „wymusić” na nim korzystną dla siebie odpowiedź. Założenie, że dla drugiego gracza kolejność ruchów nie ma znaczenia, jest równoznaczne ze stwierdzeniem, że nic wymusić się nie da, a więc wyprzedzenie jego decyzji nie ma sensu. Dlatego też w twierdzeniu 1 nie pojawia się zwrot warunkowy „poza przypadkami niejednoznaczności”, który zawarto w twierdzeniu 2.

Ponadto należy zaznaczyć, że identyczność wartości wypłat danego gracza dla dwóch różnych strategii nie gwarantuje ich niejednoznaczności. Kwestia ta zależy od tego, jakie wartości dla tych strategii przyjmują wypłaty drugiego gracza oraz od kolejności ruchów graczy. Dla przykładu, w grze z macierzą wypłat jak w tablicy 6, strategie b_1 i b_2 gracza B mają identyczne wartości wypłat gracza B

dla wszystkich strategii gracza A. Nie są one jednak niejednoznaczne wówczas, gdy gracz B musiałby się ruszyć jako pierwszy. Jeśli w takiej sytuacji gracz B wybrałby strategię b_1, wówczas odpowiedzią gracza A byłaby strategia a_2, co dałoby wynik $[3,3]$. Jeśli gracz B wybrałby strategię b_2, wówczas odpowiedzią gracza A byłaby strategia a_1, co dałoby wynik $[3,2]$. Dla gracza B nie jest zatem bez znaczenia, którą ze strategii b_j wybierze. Zależność ta nie będzie jednak już zachodzić, gdy gracz B będzie się ruszał jako drugi; wówczas obie strategie będą dla gracza B tak samo atrakcyjne, a więc niejednoznaczne.

Tabl. 6. Macierz wypłat w grze, w której – mimo identyczności wypłat gracza B – dla strategii b_1 i b_2 nie są one niejednoznaczne

Strategie	b_1	b_2
a_1	$[2,2]$	$[3,2]$
a_2	$[3,3]$	$[2,3]$

Dla odmiany jest możliwy również przypadek, kiedy strategie o różnych wartościach wypłat dla gracza B będą dla niego niejednoznaczne. Może tak być jedynie wówczas, gdy gracz B będzie wykonywał ruch jako pierwszy. Dla przykładu, w grze z macierzą wypłat jak w tablicy 7, w sytuacji gdy gracz B musi wykonać ruch jako pierwszy, nie ma dla niego znaczenia, którą ze strategii b_j wybierze. W obu bowiem przypadkach może się spodziewać wypłaty równiej $V_i^B(b_j) = 3$. Na strategię b_1 gracz A odpowie strategią a_2, natomiast na strategię b_2 odpowie strategią a_1, co doprowadzi odpowiednio do wyników $[3,3]$ albo $[2,3]$.

Tabl. 7. Macierz wypłat w grze, w której – mimo różnych wartości wypłat dla strategii gracza B – strategie te są niejednoznaczne wówczas, gdy gracz B wykonuje ruch jako pierwszy

Strategie	b_1	b_2
a_1	$[1,2]$	$[2,3]$
a_2	$[3,3]$	$[2,1]$

W przypadku gdy gracz B wykonuje ruch jako drugi, niejednoznaczność strategii może wystąpić jedynie wówczas, gdy – dla planowanej do wybrania przez gracza A strategii a_i – wartości wypłat gracza B dla niejednoznacznych strategii są identyczne. Gdyby tak nie było, gracz B wybrałby strategię, dającą mu większą wartość wypłaty, co przeczy założonej niejednoznaczności.

Można więc wprowadzić definicję gry bez preferencji ruchów.

Definicja 5. *Gra bez preferencji ruchów jest to gra, w której kolejność ruchów dla żadnego z graczy nie ma znaczenia.*

Dla przykładu, gra z macierzą wypłat jak w tablicy 8 jest grą bez preferencji ruchów. Niezależnie od tego, kto będzie wykonywał ruch jako pierwszy, spodziewanym rezultatem gry będzie wynik $[3,3]$.

Tabl. 8. Macierz wypłat w grze bez preferencji ruchów

Strategie	b_1	b_2
a_1	$[1,2]$	$[2,1]$
a_2	$[3,3]$	$[2,1]$

Preferowana kolejność ruchów a równowaga Nasha

Równowaga Nasha jest zdefiniowana [20] jako taki wynik gry, w którym żadnemu z graczy – przy założeniu, że drugi gracz utrzyma swoją aktualną strategię – nie opłaca się zmieniać swojej strategii gry. W sposób formalny, dla gry w postaci normalnej [22] rozwiązanie równowagowe określa się jako taką łączną decyzję $\mathbf{x}^* \in X_0$ (X_0 – zbiór decyzji dopuszczalnych), że:

$$f_i(x_1^*, \ldots x_i^*, \ldots x_n^*) \geqslant f_i(x_1^*, \ldots x_i, \ldots x_n^*), \forall \mathbf{x} \in X_0, \forall i = 1, \ldots n.$$

Przy założeniu różniczkowalności funkcji wypłaty $f_i(\mathbf{x})$, wynika stąd układ poniższych warunków koniecznych:

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0, \forall i = 1, \ldots n.$$

Zgodnie z przyjętą w niniejszym artykule konwencją oznaczeń, otrzymuje się:

$$x_1 = a_i,$$

$$x_2 = b_j,$$

$$f_1(x_1, x_2) = V_j^A(a_i),$$

$$f_2(x_1, x_2) = V_i^B(b_j).$$

Charakterystyczną cechą gry z macierzą wypłat jak w tablicy 3 jest, że ma ona dwie równowagi Nasha: korzystniejszą dla gracza A równowagę $[3,2]$ oraz korzystniejszą dla gracza B równowagę $[2,3]$. Jest to gra z preferencją pierwszego, w której każdy z graczy dąży do uzyskania innego rozwiązania równowagowego. Nie jest to jednakże ogólna zasada dla gier, w których gracze chcą wykonać ruch jako pierwszy. Dla przykładu, w grze z macierzą wypłat jak w tablicy 9 jest tylko jedno rozwiązanie równowagowe $[2,3]$, jednakże w interesie obu graczy jest wykonanie ruchu jako pierwszy. Gracz A chciałby jako pierwszy wybrać strategię a_1, co w wyniku odpowiedzi b_1 gracza B dałoby wynik $[3,2]$, nie bądący rozwiązaniem równowagowym: przy założeniu ustalonej strategii b_1, gracz A nie wybrałby strategii a_1 tylko a_2, co dałoby graczowi A korzystniejszy niż $[3,2]$ wynik $[4,1]$. Jednakże na strategię a_2 gracz B odpowiedziałby strategią b_2.

Gracz B natomiast chciałby jako pierwszy wybrać strategię b_2, co w wyniku odpowiedzi a_2 gracza A dałoby wynik $[2,3]$, będący rozwiązaniem równowagowym.

Tabl. 9. Macierz wypłat w grze z preferencją pierwszego, w której jest tylko jedno rozwiązanie równowagowe

Strategie	b_1	b_2
a_1	$[3,2]$	$[1,1]$
a_2	$[4,1]$	$[2,3]$

Możliwa jest jednak również sytuacja, w której gra z preferencją pierwszego nie ma wcale rozwiązania równowagowego①, jak to, dla przykładu, jest w grze z macierzą wypłat w tablicy 10. W tej grze obaj gracze chcą ruszyć się jako pierwsi: gracz A wybrałby strategię a_1, co na skutek odpowiedzi b_1 dałoby wynik $[4,2]$, gracz B wybrałby strategię b_2, co na skutek odpowiedzi a_2 dałoby wynik $[2,3]$. Żadne z tych rozwiązań nie jest rozwiązaniem równowagowym.

Tabl. 10. Macierz wypłat w grze z preferencją pierwszego, w której nie ma rozwiązania równowagowego

Strategie	b_1	b_2
a_1	$[4,2]$	$[1,1]$
a_2	$[5,1]$	$[1,1]$
a_3	$[2,4]$	$[2,3]$

Dla ustalonej strategii $a_i = a_1$, gracz B wybierze strategię b_1, co da wynik $[4,2]$. Jednak, jeśli gracz A miałby pewność, że gracz B odpowie strategią b_1, wybrałby strategię a_2, co dałoby dla gracza A korzystniejszy wynik $[5,1]$. Analogicznie, dla ustalonej strategii $b_j = b_2$, gracz A wybierze strategię a_3, co da wynik $[2,3]$. Jednak, jeśli gracz B miałby pewność, że gracz A odpowie strategią a_3, wybrałby strategię b_1, co dałoby dla gracza B korzystniejszy wynik $[2,4]$.

Charakterystyczną cechą gry z macierzą wypłat jak w tablicy 4, która – jak to wykazano – stanowi grę z preferencją drugiego, jest brak rozwiązania równowagowego. Nie jest to jednak właściwość ogólna. Istnieją bowiem również gry z preferencją drugiego, które mają rozwiązania równowagowe. Będzie tak, dla przykładu, w grze z macierzą wypłat jak w tablicy 11. W tej grze wynik $[2,2]$ jest rozwiązaniem równowagowym: dla ustalonej strategii $a_i = a_3$, gracz B wybierze strategię b_3; dla ustalonej strategii $b_j = b_3$, gracz A wybierze strategię a_3. Nie jest to jednakże rozwiązanie efektywne. W istocie obaj gracze liczą na to, że będą mogli wykonać ruch jako drugi, a drugi gracz nie wybierze strategii, prowadzącej do wyniku $[2,2]$. Jeśli pierwszy ruszy się gracz A i wybierze strategię a_1 lub a_2, gracz B może doprowadzić do wyniku $[3,4]$, wybierając strategię b_1 w odpowiedzi na strategię a_1 lub b_2 w odpowiedzi na strategię a_2. Analogicznej korzyści (wyniku $[4,3]$) może się spodziewać gracz A, jeśli pierwszy wykona ruch gracz B. W interesie obu graczy jest więc wykonać ruch jako drugi, a żaden z nich nie jest zainteresowany rozwiązaniem równowagowym.

① *Bierze się tu pod uwagę jedynie tzw. strategie czyste – gracz może wybrać tylko jedną strategię. Nie rozważa się tu przypadku strategii mieszanych, które polegają na możliwości wyboru kilku strategii z różnym prawdopodobieństwem [20].*

Tabl. 11. Macierz wypłat w grze pojedynczej z preferencją drugiego, w której jest rozwiązanie równowagowe

Strategie	b_1	b_2	b_3
a_1	$[3,4]$	$[4,3]$	$[1,1]$
a_2	$[4,3]$	$[3,4]$	$[1,1]$
a_2	$[1,1]$	$[1,1]$	$[2,2]$

W kontekście gry z rozwiązaniem równowagowym, którego wybór leży w interesie jednego z graczy, można sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. *Jeśli w danej grze w interesie jednego z graczy będzie wybór rozwiązania równowagowego, to jest to albo gra z preferencją pierwszego, albo gra bez preferencji ruchów.*

Sytuacja gry z preferencją pierwszego występuje wówczas, gdy drugi gracz będzie dążył do osiągnięcia innego wyniku (równowagowego – jak to było w grze z macierzą wypłat w tablicy 3 – lub nie równowagowego – jak to było w grze z macierzą wypłat w tablicy 10). Sytuacja gry bez preferencji ruchów będzie wówczas, gdy w interesie obu graczy jest osiągniecie tego samego wyniku. W szczególności niemożliwa jest sytuacja, w której taka gra będzie grą z preferencją drugiego, czy z jednostronną preferencją drugiego.

Dowód. Z definicji rozwiązania równowagowego wynika, że jeśli do rozwiązania tego prowadzą strategie a_i^* i b_j^*, to graczom nie opłaca się zmieniać swojej strategii, jeśli mają pewność, że drugi gracz swojej nie zmieni. Z założenia, że w interesie danego gracza – np. gracza A – jest osiągnięcie rozwiązania równowagowego, do którego prowadzi wybór strategii a_i^* i b_j^*, wynika, że gracz ten (ruszając się jako drugi) nie wybierze innej strategii $a_i \neq a_i^*$ jako odpowiedzi na strategię b_j^*, jak również, że nie jest w jego interesie, aby gracz B wybrał strategię inną niż b_j^*. Gracz A nie może więc odnieść korzyści z tego, że będzie wykonywał ruch jako drugi.

Nie może też takiej korzyści odnieść gracz B, byłoby to bowiem w sprzeczności z definicją rozwiązania równowagowego. Z definicji tej wynika, że w odpowiedzi na strategię a_i^* gracz B nie odniesie korzyści, wybierając strategię inną niż b_j^*, co byłoby konieczne, aby rozpatrywana gra była grą z jednostronną preferencją drugiego. Rozwiązanie jest rozwiązaniem równowagowym właśnie dlatego, że każdemu z graczy (a więc również graczowi B) opłaca się wybrać strategię, prowadzącą do niego (b_j^*), jeśli drugi gracz wybrał strategię (a_i^*), która osiągnięcie tego rozwiązania umożliwia. ■

Preferowana kolejność ruchów a model gry Stackelberga

W literaturze teorii gier [1–5, 13, 17, 21] od dawna funkcjonuje pojęcie gry Stackelberga, od nazwiska niemieckiego ekonomisty Heinricha Freiherra von Stackelberga, który jako jeden z pierwszych badał gry, w których gracze wykonują ruchy sekwencyjnie[1].

[1] *Swój model gry sekwencyjnej Stackelberg opublikował w 1934 r. w pracy „Marktform und Gleichgewicht”.*

W klasycznym modelu Stackelberga gracz, który wykonuje ruch jako pierwszy, jest określany jako ***leader***, natomiast gracz wykonujący ruch jako drugi jako ***follower***. Model opisuje zjawisko konkurencji duopolistycznej, w której *leader* zna potencjalną odpowiedź *followera*, a przy tym obaj gracze podejmują decyzję o charakterze ilościowym[1], dotyczącą planowanej wielkości produkcji, przy określonym poziomie popytu. W modelu gry Stackelberga *leader* jest zawsze w uprzywilejowanej pozycji (*first mover adventage*), mając możliwość ustalenia takiej wielkości produkcji, jaka pozwoli mu na uzyskanie większego udziału w rynku niż *followera*, którego (racjonalna) odpowiedź jest niejako wymuszona, przez pierwotną decyzję *leadera*.

Formalnie można to zapisać w następujący sposób. Niech x_L i x_F oznaczają planowane wielkości produkcji, odpowiednio gracza *A* (*leadera*) i gracza *B* (*followera*). Funkcje $f_L(x_L,x_F)$ oraz $f_F(x_L,x_F)$ oznaczają udziały w rynku, jakie gracze uzyskują w efekcie ustalenia wielkości produkcji na poziomach x_L i x_F. Gracz *A*, *leader*, wie, że w rezultacie ustalenia przez niego wielkości produkcji na poziomie x_L gracz *B* ustali w odpowiedzi taką wielkość produkcji $x_F = r_F(x_L)$, dla której funkcja udziału w rynku *followera* – $f_F(x_L,x_F)$ przyjmie wartość maksymalną:

$$\max_{x_F} f_F(x_L,x_F) = f_F(x_L, r_F(x_L)), \tag{1}$$

w której $r_F(x_L)$ oznacza tzw. funkcję reakcji *followera* na określoną decyzję x_L *leadera*. Wiedząc, jaki charakter będzie miała odpowiedź *followera* (znając jego funkcję reakcji $r_F(.)$) *leader* ustala taką wartość produkcji x_L, jaka, z uzwględnieniem odpowiedzi *followera*, zmaksymalizuje jego udział w rynku:

$$x_L^* = \arg\max_{x_L} f_F(x_L, r_F(x_L)). \tag{2}$$

Przewaga *leadera* bywa interpretowana, jako przewaga o charakterze informacyjnym: *leader* wie, jaki charakter będzie miała odpowiedź *followera* i ma możliwość przekazania informacji o podjętej przez siebie decyzji lub też możliwość złożenia nieodwołalnego zobowiązania do wykonania określonego ruchu[2]. Przy takiej interpretacji *leader*, *de facto*, nie musi wykonywać ruchu jako pierwszy, a jedynie złożyć nieodwołalną i wiarygodną deklarację wybrania określonej strategii. Wówczas ruch *followera*, będący w istocie pierwszym ruchem w grze, musi zależeć od deklarowanego ruchu *leadera*. Na podstawie tej interpretacji powstała rodzina gier, określanych mianem **odwrotnych gier Stackelberga** (*inverse Stackelberg games*) [17, 18, 19]. W odwrotnej grze Stackelberga to *follower* wykonuje ruch jako pierwszy, natomiast *leader* ma możliwość przekazania mu informacji, jaka będzie jego odpowiedź na określony ruch *followera* – $r_L(x_F)$. Mając tę informację, *follower* wybiera taką wielkość produkcji x_F, jaka maksymalizuje jego udział w rynku:

$$x_F^* = \arg\max_{x_F} f_F(r_L(x_F), x_F). \tag{3}$$

Problem decyzyjny *leadera* sprowadza się tu do wyboru optymalnej funkcji reakcji $r_L^*(x_F)$. Symbolicznie można to ująć w formie poniższego zadania optymalizacji:

$$r_L^*(.) = \arg\max_{r_L(.)} f_L(r_L(x_F^*), x_F^*). \tag{4}$$

[1] *Konkurencję o charakterze cenowym opisuje tzw. model Bertranda.*

[2] *Osobnym problemem staje się tu wiarygodność przekazanych przez leadera informacji z punktu widzenia followera, czy też w ogóle możliwość odbioru takich informacji. W przypadku gdy follower nie odbiera lub nie uwzględnia informacji o wykonanym przez leadera ruchu (czy też nieodwołalnym zobowiązaniu do jego wykonania), jego odpowiedź może być dla leadera zaskoczeniem, a do opisu sytuacji bardziej trafny staje się wówczas model Cournota, w którym gracze wykonują ruchy jednocześnie [14].*

Abstrahując od charakteru podejmowanych decyzji (ilościowych czy cenowych), należy stwierdzić, że analizowane w tym artykule gry z preferencją pierwszego (opisane np. w przykładzie 3) stanowią adekwatną ilustrację modelu gry Stackelberga, kiedy wykonujący ruch jako pierwszy *leader* odnosi z tego faktu korzyść. Jednakże z racji na asymetrię informacyjną nie można w ogólności powiedzieć, że *follower* skorzystałby w tej grze na wykonywaniu ruchu jako pierwszy. *Leader* jest tu w lepszej sytuacji, gdyż zna funkcję reakcji $r_F(x_l)$ *followera*, co w istocie oznacza znajomość jego macierzy wypłat i celu, do jakiego zmierza (indywidualnie efektywny lub antagonistyczny)[1]. Natomiast *follower*, nie znając funkcji reakcji *leadera* $r_L(x_F)$, w istocie rozgrywałby grę przeciwko naturze, a to oznacza, że bardziej opłacałoby mu się wykonywać ruch jako drugi, gdy będzie już znał decyzję x_L *leadera* [7, 11].

Model odwrotnej gry Stackelberga stanowi adekwatną ilustrację gry z preferencją drugiego (por. przykład 4) i to dla obu graczy. Jeśli w tej grze opłaca się *leaderowi* wykonać ruch jako drugi i przekazać *followerowi* jedynie charakter swojej odpowiedzi (funkcję reakcji $r_L(x_F)$, nie zaś rzeczywistą funkcję wypłaty $f_L(x_L,x_F)$), umożliwiającą mu w ten sposób wpływanie na ruch *followera*, to na mocy twierdzenia 2 oznacza to, że również dla *followera* będzie korzystniej wykonać ruch jako drugi.

Warto jednakże zauważyć, że model odwrotnej gry Stackelberga nie utożsamia się w sposób prosty z grą z preferencją drugiego. W istocie, jak to będzie rozważane dalej, konieczność wykonania ruchu jako drugi może powstać niezależnie od tego, czy jest to sytuacja korzystna dla danego gracza, czy nie. Dla przykładu, *leader* może być zmuszony wykonywać ruch jako drugi w grze, w której wolałby móc wykonywać ruch jako pierwszy (zmuszony do wykonania ruchu jako drugi w grze z preferencją pierwszego). Tu do analizy jego sytuacji decyzyjnej właściwy będzie model odwrotnej gry Stackelberga.

Pierwszym pytaniem, na które mający przewagę informacyjną *leader* musi odpowiedzieć, jest to, w jaką grę bardziej opłaca mu się grać: w grę Stackelberga, czy w odwrotną grę Stackelberga, czyli czy wykonać ruch jako pierwszy, czy jako drugi. Odpowiedź na to pytanie zależy zarówno od struktury macierzy wypłat graczy i tego, czy definiują one grę z preferencją pierwszego, czy grę z preferencją drugiego, jak i od tego, czy *follower*, posiadający jedynie informację na temat własnej funkcji wypłaty $f_F(.)$ oraz albo informację na temat decyzji *leadera* – x_L (model gry Stackelberga), albo jego funkcji reakcji $r_L(x_F)$ (model odwrotny gry Stackelberga), uzna tę informację (w szczególnym przypadku deklarację *leadera*) za wiarygodną. Możliwe bowiem są przypadki, gdy w grze z preferencją pierwszego, przy założeniu przewagi informacyjnej *leadera*, będzie korzystniej dla niego wykonać ruch jako drugi. Będzie tak wówczas, kiedy *follower*, pozbawiony informacji na temat macierzy wypłat *leadera* – czyli rozgrywający w istocie grę przeciwko naturze – wybierze strategię (dobrze uzasadnioną z punktu widzenia gry przeciwko naturze), która będzie dla *leadera* korzystniejsza, niż gdyby ten miał wykonać ruch jako pierwszy, a strategia *followera* byłaby na ten ruch odpowiedzią.

Przykład 1

Macierz wypłat dla graczy A i B przedstawia się jak w tablicy 12[2]. Jest to gra z preferencją pierwszego. W sytuacji gdy obaj gracze znają swoje macierze wypłat, obaj chcieliby wykonać ruch jako pierwszy (przy założeniu, że gracze dążą do celu indywidualnie efektywnego). Gracz A wybrałby wówczas

[1] *Zakłada się tu, że funkcja reakcji followera jest rezultatem znajomości przez leadera jego macierzy wypłat i celu, do jakiego zmierza. Pomija się natomiast przypadek, kiedy follower (na wzór leadera w odwrotnej grze Stackelberga) przekazuje leaderowi informację na temat swojej funkcji reakcji, nie odsłaniając rzeczywistej macierzy wypłat, ani motywu (celu, do jakiego zmierza), który powoduje transformację tej macierzy w funkcję reakcji.*

[2] *Przykład zaczerpnięty z innego artykułu Autora [7].*

strategię a_2, co w rezultacie odpowiedzi b_2 ustaliłoby dla gracza A korzystniejszy wynik $[3,2]$, natomiast gdyby pierwszy wykonał ruch gracz B, wybrałby strategię b_3, co w rezultacie odpowiedzi a_1 ustaliłoby dla gracza B korzystniejszy wynik $[2,3]$.

Tabl. 12. Ilustracja przypadku, gdy graczowi A opłaca się ruszyć jako pierwszy, gdy gracz B zna jego macierz wypłat, a także jako drugi, gdy gracz B nie zna jego macierzy wypłat

Strategie	b_1	b_2	b_3
a_1	[4,1]	[1,1]	[2,3]
a_2	[0,1]	[3,2]	[1,1]
a_3	[0,3]	[1,0]	[1,0]

Jednakże w sytuacji, gdy gracz B nie znałby macierzy wypłat gracza A (gra w grę przeciwko naturze) i byłby zmuszony do ruszania się jako pierwszy, decyzję odnośnie do wyboru strategii oparłby wyłącznie na analizie własnej macierzy wypłat, korzystając z różnych kryteriów wyboru strategii w grach przeciwko naturze [6, 12, 15, 20, 23]. W zaprezentowanym przykładzie wektor wypłat gracza B, odpowiadający strategii b_1 z dokładnością do uporządkowania składowych, dominuje wektory wypłat dla strategii b_2 i b_3. W związku z tym wszystkie racjonalne kryteria wyboru strategii wskażą, jako najlepszą w ich sensie, strategię b_1. Należy się więc spodziewać, że gracz B, nie znając macierzy wypłat gracza A, a co się z tym wiąże potencjalnych jego odpowiedzi, wybierze właśnie tę strategię. W tej sytuacji gracz A odpowiedziałby strategią a_1, uzyskując w ten sposób najkorzystniejszy dla siebie wynik $[4,1]$.

□

Analiza zależności między ustaloną a preferowaną kolejnością ruchów w grze pojedynczej

Z punktu widzenia gry podwójnej wybór określonej strategii (na rynku detalicznym lub hurtowym) jest równoznaczny z wyborem określonej gry pojedynczej, która w drugiej fazie zostanie rozegrana. Tak było w przypadku gry z macierzą wypłat jak w tablicy 1, kiedy wybór strategii h_1 doprowadził do gry pojedynczej z macierzą wypłat jak w tablicy 2. Należy zauważyć, że gra ta byłaby opisana inną macierzą wypłat, gdyby w grze podwójnej wybrano strategię h_2 lub h_3. Wobec tego i w tym sensie możliwość wykonywania ruchu w grze podwójnej należy traktować jako pozycję uprzywilejowaną.

W całej grze jest możliwych sześć sekwencji ruchów graczy: $\mathcal{ABH}$, $\mathcal{AHB}$, $\mathcal{BAH}$, $\mathcal{BHA}$, $\mathcal{HAB}$, $\mathcal{HBA}$. Z punktu widzenia gracza A uszeregowania $\mathcal{BAH}$ i $\mathcal{BHA}$ mogą być rozpatrywane jako gra pojedyncza ($\mathcal{AH}$ i $\mathcal{HA}$), dla niego bowiem gra rozpoczyna się dopiero od momentu, gdy gracz B ustali już swoje ceny na rynku detalicznym ($\mathcal{B}$)[1]. W pozostałych przypadkach, a więc $\mathcal{AHB}$, $\mathcal{HAB}$, $\mathcal{ABH}$ i $\mathcal{HBA}$, w pierwszym ruchu gracz A ma możliwość określenia (przypadki $\mathcal{AHB}$ i $\mathcal{ABH}$) lub wpłynięcia na określenie (przypadki $\mathcal{HAB}$ i $\mathcal{HBA}$) rodzaju gry, jaka będzie rozgrywana w drugiej fazie – rodzaj gry pojedynczej.

[1] *Jest to stwierdzenie prawdziwe przy założeniu, że gracz A nie może bezpośrednio lub pośrednio wpływać na decyzje cenowe gracza B na rynku detalicznym.*

Wcześniejsze analizy doprowadziły do sformułowania pojęć gry z preferencją pierwszego oraz gry z preferencją drugiego. Gra z preferencją pierwszego jest to gra, w której – w sytuacji, gdy obaj gracze znają nawzajem swoje macierze wypłat i cel, do którego dążą (tu maksymalizacja własnej funkcji wypłaty) – dla obu graczy jest korzystnie ruszyć się jako pierwszy. Natomiast gra z preferencją drugiego jest to gra, w której (przy tych samych założeniach) dla obu graczy jest korzystniej ruszyć się jako drugi.

Wobec powyższego można by przypuszczać, że dla uszeregowań $\mathcal{AHB}$ oraz $\mathcal{HAB}$ celem gracza A powinien być wybór takiej strategii gry w pierwszym ruchu (a_i dla przypadku $\mathcal{AHB}$ i h_l dla przypadku $\mathcal{HAB}$), która doprowadzi w drugiej fazie gry (gry pojedynczej) do rozgrywania gry z preferencją pierwszego, czyli sytuacji, w której dla obu graczy byłoby korzystniej ruszyć się jako pierwszy. Gracz A bowiem w grze pojedynczej musi wykonać ruch jako pierwszy[1]. Natomiast dla uszeregowań $\mathcal{ABH}$ oraz $\mathcal{HBA}$ celem gracza A powinien być wybór takiej strategii gry w pierwszym ruchu (a_i dla przypadku $\mathcal{ABH}$ i h_l dla przypadku $\mathcal{HBA}$), która doprowadzi w drugiej fazie gry (gry pojedynczej) do rozgrywania gry z preferencją drugiego, czyli sytuacji, w której dla obu graczy byłoby korzystniej ruszyć się jako drugi[2]. Jest to jednakże intuicja błędna, co zostanie wykazane na poniższych przykładach.

Przykład 2

Kolejność ruchów graczy jest ustalona w następujący sposób: $\mathcal{HAB}$. Pierwszym ruchem w grze są więc negocjacje stawek rozliczeniowych (ruch hipotetycznego gracza H), po którym ma być rozgrywana gra pojedyncza ($\mathcal{AB}$), w której najpierw gracz A ustala swoje ceny na rynku detalicznym ($\mathcal{A}$), a następnie ceny te ustala gracz B ($\mathcal{B}$). Intuicja podpowiada, że ponieważ w grze pojedynczej ($\mathcal{AB}$) gracz A będzie musiał wykonać ruch jako pierwszy, w trakcie negocjacji cen na rynku hurtowym (ruch gracza H) powinien dążyć do wyboru takiej strategii h_l, która ukształtuje przyszłą grę pojedynczą, jako grę z preferencją pierwszego. Niech macierz wypłat graczy przedstawia się jak w tablicy 13.

Tabl. 13. Macierze wypłat graczy A i B w grze podwójnej, w której opłaca się graczowi A ukształtować grę pojedynczą, jako grę z preferencją drugiego

Strategie	h_1		Strategie	h_2	
	b_1	b_2		b_1	b_2
a_1	[3,3]	[2,4]	a_1	[6,5]	[5,6]
a_2	[4,2]	[1,1]	a_2	[5,6]	[6,5]

[1] *Uszeregowanie $\mathcal{AHB}$ oznacza, że najpierw (w ramach gry podwójnej) gracz A ustala swoje ceny na rynku detalicznym (wybierając określoną strategię a_i), następnie (już w ramach gry pojedynczej) odbywają się negocjacje stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym (wybór strategii h_l), po zakończeniu których gracz B ustala swoje ceny na rynku detalicznym (wybierając strategię b_j). Przyjmuje się tu, że w przypadku gry pojedynczej, w której biorą udział gracze H i B, strategie gracza H są traktowane jako strategie gracza A (na nie bowiem ten gracz ma wpływ). Uszeregowanie $\mathcal{HB}$ w grze pojedynczej oznacza zatem, że pierwszy rusza się gracz A.*

[2] *Przypuszczenie to wynika z faktu wyraźnie i nieodwołalnie ustalonej kolejności ruchów graczy. Nakreślane tu intuicyjne przypuszczenie sugeruje, że graczowi A powinno zależeć na takim ukształtowaniu gry pojedynczej, w której preferowana kolejność ruchów będzie odpowiadała ustalonej kolejności.*

Jeśli w trakcie negocjacji zostanie wybrana strategia h_1, wówczas w grze pojedynczej będzie rozgrywana gra z macierzą wypłat jak w tablicy 14. Jeśli w trakcie negocjacji zostanie wybrana strategia h_2, wówczas w grze pojedynczej będzie rozgrywana gra z macierzą wypłat jak w tablicy 15.

Tabl. 14. Macierz wypłat graczy w grze pojedynczej w przypadku, gdy w grze podwójnej została wybrana strategia h_1

Strategie	b_1	b_2
a_1	[3,3]	[2,4]
a_2	[4,2]	[1,1]

Tabl. 15. Macierz wypłat graczy w grze pojedynczej w przypadku, gdy w grze podwójnej została wybrana strategia h_2

Strategie	b_1	b_2
a_1	[6,5]	[5,6]
a_2	[5,6]	[6,5]

Gra z macierzą wypłat jak w tablicy 14 jest grą z preferencją pierwszego. Gracz A chciałby wykonać ruch jako pierwszy i wybrać strategię a_2, co w rezultacie odpowiedzi b_1 doprowadziłoby do wyniku $[4,2]$. Gdyby pierwszy wykonywał ruch gracz B, wybrałby strategię b_2, co w rezultacie odpowiedzi a_1 dałoby wynik $[2,4]$. Obaj gracze korzystają więc na tym, że wykonują ruch jako pierwsi.

Gra z macierzą wypłat jak w tablicy 15 jest grą z preferencją drugiego. Gracz, który wykona ruch jako drugi, może sobie zapewnić wypłatę równą 6. Gracz, który wykona ruch jako pierwszy, otrzyma wypłatę równą 5.

Widać jednak, że przy założeniu, iż w grze pojedynczej gracz A musi wykonać ruch jako pierwszy, jest korzystniej dla niego rozgrywać grę z macierzą wypłat jak w tablicy 15. Grając w grę z macierzą wypłat jak w tablicy 14, gracz A może sobie zapewnić maksymalną wypłatę równą $V_1^A(a_2) = 4$, jeśli wybierze strategię a_2, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_1, maksymalizującą jego wypłatę $V_2^B(b_j)$, dla ustalonej strategii gracza A. Grając zaś w grę z macierzą wypłat jak w tablicy 15, gracz A (przy konieczności wykonania ruchu jako pierwszy) może sobie zapewnić wypłatę równą co najmniej 5, niezależnie od tego, jaką wybierze strategię.

Tak więc, mimo konieczności wykonywania ruchu jako pierwszy w grze pojedynczej, graczowi A może opłacać się zabiegać o to, aby w trakcie negocjacji została wybrana taka strategia (h_l), która doprowadzi do sformułowania gry pojedynczej, jako gry z preferencją drugiego.

□

W analogiczny sposób można wykazać, że w przypadku gdy w grze pojedynczej gracz A musiałby ruszyć się jako drugi (np. sekwencja $\mathcal{BA}$), może być korzystniej dla niego wybrać taką strategię w grze podwójnej (h_l w grze $\mathcal{HBA}$), która doprowadzi do konieczności rozgrywania w drugiej fazie (gra pojedyncza) gry z preferencją pierwszego.

Przykład 3

Macierz wypłat przedstawia się jak w tablicy 16. Kolejność ruchów jest określona przez sekwencję $\mathcal{HBA}$.

Tabl. 16. Macierze wypłat graczy A i B w grze podwójnej, w której graczowi A opłaca się ukształtować grę pojedynczą, jako grę z preferencją pierwszego

Strategie	h_1		Strategie	h_2	
	b_1	b_2		b_1	b_2
a_1	[4,4]	[3,5]	a_1	[2,1]	[1,2]
a_2	[5,3]	[2,2]	a_2	[1,2]	[2,1]

Jeśli w trakcie negocjacji zostanie wybrana strategia h_1, wówczas w grze pojedynczej będzie rozgrywana gra z macierzą wypłat jak w tablicy 17. Jeśli w trakcie negocjacji zostanie wybrana strategia h_2, wówczas w grze pojedynczej będzie rozgrywana gra z macierzą wypłat jak w tablicy 18.

Tabl. 17. Macierz wypłat graczy w grze pojedynczej, w przypadku gdy w grze podwójnej została wybrana strategia h_1

Strategie	b_1	b_2
a_1	[4,4]	[3,5]
a_2	[5,3]	[2,2]

Tabl. 18. Macierz wypłat graczy w grze pojedynczej, w przypadku gdy w grze podwójnej została wybrana strategia h_2

Strategie	b_1	b_2
a_1	[2,1]	[1,2]
a_2	[1,2]	[2,1]

Gra z macierzą wypłat jak w tablicy 17 jest grą z preferencją pierwszego, natomiast gra z macierzą wypłat jak w tablicy 18 – grą z preferencją drugiego.

Widać, że nawet przy założeniu, iż w grze pojedynczej gracz A musi wykonać ruch jako drugi, jest korzystniej dla niego rozgrywać grę z macierzą wypłat jak w tablicy 17. Grając w grę z macierzą wypłat jak w tablicy 18, gracz A może sobie zapewnić maksymalną wypłatę równą 2, niezależnie od tego, jaką strategię w pierwszym ruchu wybierze gracz B. Grając zaś w grę z macierzą wypłat jak w tablicy 17, gracz A może sobie zapewnić wypłatę równą co najmniej 3.

Tak więc, mimo konieczności wykonywania ruchu jako drugi w grze pojedynczej, graczowi A może opłacać się zabiegać o to, aby w trakcie negocjacji została wybrana taka strategia (h_l), która doprowadzi do sformułowania gry pojedynczej, jako gry z preferencją pierwszego.

□

Oczywiście ustalona kolejność ruchów graczy może się pokrywać – z punktu widzenia gracza A – z preferencją ruchów w grze pojedynczej.

Przykład 4

Kolejność ruchów graczy jest ustalona w sposób $\mathcal{HAB}$. Macierze wypłat graczy są analogiczne do zamieszczonych w przykładzie 3 w tablicach $16 \div 18$.

W tym przypadku graczowi A opłaca się zabiegać, aby w trakcie negocjacji została wybrana strategia h_1, co doprowadzi do ukształtowania gry pojedynczej, jako gry z preferencją pierwszego (tabl. 17), co jest zgodne z ustaloną kolejnością ruchów ($\mathcal{HAB}$), w ramach której w grze pojedynczej ($\mathcal{AB}$) gracz A będzie wykonywał ruch jako pierwszy. W przypadku rozgrywania gry z macierzą wypłat jak w tablicy 17, gracz A może sobie zapewnić wypłatę równą co najmniej 3, jeśli wybierze strategię a_1, a przy założeniu, że gracz B w swych decyzjach będzie się kierował wyłącznie maksymalizacją własnej funkcji wypłaty, gracz A może sobie zapewnić wypłatę równą 5, jeśli wybierze strategię a_2.

W grze z macierzą wypłat jak w tablicy 18 gracz A może się spodziewać wypłaty równej 1.

□

Łatwo podać analogiczny przykład, gdy gracz A w grze pojedynczej musi wykonać ruch jako drugi. Takiej samej różnorodności przypadków należy się spodziewać również z punktu widzenia gracza B.

Podsumowanie

Z przeprowadzonych analiz wynikają następujące stwierdzenia.

- Jeśli w danej grze pojedynczej obaj gracze mają określone preferencje odnośnie do kolejności wykonywania ruchów, są to zawsze preferencje przeciwstawne: albo obaj chcieliby wykonać ruch jako pierwszy, albo obaj jako drugi.
- Jeśli w danej grze pojedynczej tylko jeden z graczy ma preferencje odnośnie do kolejności wykonywania ruchów (dla drugiego kolejność ruchów nie ma znaczenia), to jest to preferencja, aby wykonywać ruch jako drugi.
- Niejednoznaczne (jak i jednoznaczne) mogą być strategie, którym odpowiadają zarówno jednakowe, jak i niejednakowe wektory wypłat danego gracza.

- Nie ma bezpośredniej i ogólnej zależności między istnieniem lub nieistnieniem równowagi Nasha (w strategiach czystych) a preferencją ruchów w grze pojedynczej.
- Jeśli w danej grze w interesie jednego z graczy będzie wybór rozwiązania równowagowego, jest to albo gra z preferencją pierwszego, albo gra bez preferencji ruchów.
- Gry z preferencją pierwszego stanowią adekwatną ilustrację modelu gry Stackelberga, jednak z racji na asymetrię informacyjną, zakładaną w tym modelu gry, nie można w ogólności powiedzieć, że *follower* skorzystałby w tej grze na wykonaniu ruchu jako pierwszy.
- Gry z preferencją drugiego stanowią adektwatną ilustrację modelu odwrotnej gry Stackelberga, w której zarówno *leaderowi*, jak i *followerowi* opłacałoby się wykonać ruch jako drugi.
- Podstawową kwestią, dla mającego przewagę informacyjną *leadera*, jest odpowiedź na pytanie o najbardziej korzystną dla niego kolejność ruchów, czyli wybór gry (gry Stackelberga lub odwrotnej gry Stackelberga), w którą będzie grał.
- Są gry z preferencją pierwszego, w których, z racji na ograniczenia informacyjne *followera*, opłaca się *leaderowi* wykonać ruch jako drugi.
- Między dwoma celami wyboru strategii gry w grze podwójnej, tj. ustaleniem preferencji ruchów w grze pojedynczej, zgodnej z ustaloną kolejnością ruchów oraz maksymalizacją (optymalizacją) własnej funkcji wypłaty, może, lecz nie musi, zachodzić zbieżność. W szczególnych przypadkach cele te mogą być sprzeczne (strategia maksymalizująca wartość funkcji wypłaty może prowadzić do ukształtowania gry pojedynczej, jako gry z preferencją kolejności ruchów niezgodną – z punktu widzenia danego gracza – z kolejnością ustaloną).

Bibliografia

[1] Basar T., Srikant R.: *A Stackelberg network game with a large number of followers*. Journal of Optimization Theory and Applications, 2002, vol. 115, no. 3, s. 479–490, http://decision.csl.uiuc.edu/ tbasar/jota02-homepage.pdf

[2] Blajer-Gołębiewska A., Zielenkiewicz M.: *Teoria gier jako narzędzie ekonomii XX i XXI wieku*, http://mikro.univ.szczecin.pl/bp/pdf/17/7.pdf

[3] Denegre S., Raplhs T.: *Multiobjective mixed-integer Stackelberg games*. W: Materiały z konferencji *Euro XXI*, Reykjavik, Islandia, 2006

[4] Fujiwara K.: *A Stackelberg game model of dynamic duopolistic competition with sticky price*. Economics Bulletin, 2006, vol. 12, no. 12, s. 1–9, http://economicsbulletin.vanderbilt.edu/2006/volume12/EB-06L10030A.pdf

[5] Jungers M., Trelat E., Abou-Kandil H.: *Stackelberg strategy with closed-loop information structure for linear quadratic games*. HAL – Hyper Articles en Ligne, http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/08/67/80/PDF/JTAKsiam.pdf

[6] Laskowski S.: *Criteria of choosing strategy in games against nature*. W: Materiały z konferencji *The Fifth International Conference on Decision Support for Telecommunications and Information Society*, Warszawa, 2005

[7] Laskowski S.: *Dobrze doinformowany konkurent*. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego nr 463, Ekonomiczne Problemy Łączności nr 10, Przeobrażenia na rynku łączności i kierunki jego rozwoju, 2007

[8] Laskowski S.: *Modelowanie gry rynkowej na konkurencyjnym rynku telekomunikacyjnym.* Telekomunikacja i Techniki Informacyjne, 2004, nr 3–4, s. 47–60

[9] Laskowski S.: *Opracowanie narzędzi analitycznych do wspomagania decyzji dotyczących wysokości opłat taryfikacyjnych i stawek rozliczeniowych na konkurencyjnym rynku telekomunikacyjnym*. Warszawa, Instytut Łączności, 2005

[10] Laskowski S.: *Opracowanie narzędzi analitycznych do wspomagania decyzji dotyczących wysokości opłat taryfikacyjnych i stawek rozliczeniowych na konkurencyjnym rynku telekomunikacyjnym*. Warszawa, Instytut Łączności, 2006

[11] Laskowski S.: *O roli informacji na temat macierzy wypłat w konkurencyjnej grze na rynku telekomunikacyjnym.* Telekomunikacja i Techniki Informacyjne, 2004, nr 3–4, s. 61–72

[12] Laskowski S.: *Wspomaganie procesu ustalania cen detalicznych i negocjacji stawek rozliczeniowych na konkurencyjnym rynku usług telekomunikacyjnych.* Rozprawa doktorska. Warszawa, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, 2006

[13] Li M., Crus J. B. Jr., Simaan M. A.: *An approach to discrete-time incentive feedback Stackelberg games*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cyberneticts – Part A: Systems and Humanas, 2002, vol. 32, no. 4, http://www.ece.osu.edu/ cruz/Papers/J99-SMC-32-4.pdf

[14] Morgan J., Vardy F.: *An experimental study of commitment and observability in Stackelberg games*. Games and Economic Behavior, 2001, vol. 49, no. 2, s. 401–423

[15] Ogryczak W.: *Wspomaganie decyzji w warunkach ryzyka*. Skrypt wykładu. Warszawa, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, 2002

[16] Raiffa H.: *The Art and Since of Negotiation.* Cambridge, Harvard University Press, 1982

[17] Staňkowá K.: *Stackelberg games – properties and applications*. Collequium at Institut für Wirtschaftsinformatik, Leibniz Universitat, 2006, http://www.iwi.uni-hannover.de/cms/images/stories/upload/lv/sosem07/ kolloquium/stankova_240407.pdf

[18] Staňkowá K., Bliemer M., Olsder G. J.: *Inverse Stackelberg games and their application to bilevel optimal toll design problem.* W: Materiały z sympozjum *12th International Symposium on Dynamic Games and Applications*. The International Society on Dynamical Games, July 2006, http://www-sop.inria.fr/coprin/Congress/ISDG06/Abstract/stankova1.pdf

[19] Staňkowá K., Olsder G. J.: *Inverse Stackelberg games versus adverse-selection principal-agent model theory.* W: Materiały z sympozjum *12th International Symposium on Dynamic Games and Applications*. The International Society on Dynamical Games, July 2006, http://www-sop.inria.fr/coprin/Congress/ISDG06/Abstract/stankova2.pdf

[20] Straffin P. D.: *Teoria gier*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe Scholar, 2001

[21] van Hoesel S.: *An overview of Stackelberg pricing in networks.* Research Memoranda 042, Maastricht: METEOR, 2006, http://arno.unimaas.nl/show.cgi?fid=3724

[22] Wierzbicki A. P.: *Optymalizacja i wspomaganie decyzji*. Skrypt wykładu. Warszawa, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, 2000

[23] Worobiew N. N., Kofler E., Greniewski H.: *Strategia gier*. Warszawa, Książka i Wiedza, 1969

Sylwester Laskowski

Dr inż. Sylwester Laskowski (1973) – absolwent Wydziału Elektroniki i Technik Informacyjnych Politechniki Warszawskiej (1999); absolwent Wydziału Instrumentalnego Warszawskiej Akademii Muzycznej (2003); pracownik naukowy Instytutu Łączności w Warszawie (od 2004); zainteresowania naukowe: techniki informacyjne, wspomaganie decyzji, analiza wielokryterialna, sztuka i technika negocjacji, teoria gier, rynek telekomunikacyjny i współpraca międzyoperatorska.
e-mail: S.Laskowski@itl.waw.pl