O regularyzacji rozwiązań niejednoznacznych w grze przeciwko naturze

Sylwester Laskowski

Zaprezentowano kilka znanych z literatury kryteriów wyboru strategii w grach przeciwko naturze i wykazano użyteczność lub nieużyteczność określonych regularyzacji.

regularyzacja, kryteria wyboru strategii, analiza wielokryterialna

Wprowadzenie

Wielowymiarowość problemów decyzyjnych, jak również wielość kryteriów, branych pod uwagę przez decydentów przy ocenie jakości uzyskanych rozwiązań, sprawia, że pojęcie **rozwiązanie optymalne** w tego typu problemach jest zwykle zastępowane pojęciem **rozwiązanie efektywne**, **sprawne** czy **pareto-optymalne** [5, 12, 13], a problem sprowadza się do poszukiwania rozwiązań, które nie są zdominowane przez inne rozwiązania. Rozwiązania niezdominowane są to takie, które obiektywnie uznaje się za nie gorsze niż jakiekolwiek inne dostępne rozwiązanie problemu, przy czym ową obiektywność rozumie się jako niezależność od subiektywnych i w określonym sensie racjonalnych [9] preferencji decydenta.

Proces wyboru określonego rozwiązania spośród zbioru rozwiązań niezdominowanych (efektywnych, sprawnych, pareto-optymalnych) dokonuje się przez modelowanie preferencji decydenta [2]. Modelowanie to polega na wyborze określonych, istotnych dla decydenta kryteriów oceny oraz odpowiedniej agregacji [10] czy skalaryzacji [3] tych kryteriów, pozwalającej w sposób zgodny z preferencjami decydenta przekształcić wielokryterialny problem w pojedynczą funkcję oceny. To przekształcenie umożliwia uszeregowanie poszczególnych, niezdominowanych rozwiązań pod kątem ich ważności dla decydenta, w szczególności zaś pozwala na wyłonienie rozwiązania dla decydenta najlepszego, w jego subiektywnej ocenie optymalnego.

Pewne sposoby skalaryzacji nie prowadzą do pełnego porządku, a jedynie do porządku częściowego [10, 12]. W takim częściowym porządku w dalszym ciągu istnieją tzw. rozwiązania nieporównywalne, czy niejednoznaczne, których ważności nie można rozróżnić określoną funkcją oceny (funkcją skalaryzującą).

Tu pojawia się konieczność przeprowadzenia tzw. **regularyzacji** [9], czyli dokonania porównania owych niejednoznacznych (w świetle określonej funkcji skalaryzującej) rozwiązań z punktu widzenia innej funkcji, również zgodnej z preferencjami decydenta.

Jedną z klas wielokryterialnych problemów decyzyjnych są problemy podejmowania decyzji w warunkach niepewności, wyrażane czasem w formie charakterystycznej dla teorii gier, tzw. **gry przeciwko naturze** [7, 11, 14]. Wówczas decydent, który jest graczem w tej grze, ocenia swoje posunięcia (wybierane strategie gry) w świetle wielu kryteriów, z których każde odzwierciedla możliwy scenariusz rozwoju spraw w przyszłości, tzw. **stan natury**. Problem bywa przedstawiany w formie tzw. **macierzy gry** (macierzy wypłat gracza). W macierzy tej wiersze odpowiadają możliwym decyzjom gracza – a_i, kolumny możliwym stanom natury n_j, a elementami macierzy są wartości tzw. **funkcji wypłaty** $V_{i,j}$, określającej skalę korzyści, którą odnosi gracz w rezultacie podjęcia decyzji (wybrania strategii) a_i, jeśli przyszłość ukształtuje się w sposób zgodny ze stanem n_j (tabl. 1).

Tabl. 1. Macierz wypłat gracza w grze przeciwko naturze

Strategie	n_1	n_2	$\boldsymbol{n_3}$	n_4
a_1			$\vdots$	
$\boldsymbol{a_2}$	......	......	$[\boldsymbol{V_{2,3}}]$	......
a_3			$\vdots$	
a_4			$\vdots$	

Gracz nie zna *a priori* przyszłych stanów natury, dlatego jego ocena poszczególnych decyzji (strategii a_i) musi się dokonywać nie na podstawie odpowiadających im pojedynczych wartości $V_{i,j}$ wypłat, ale na wektorach tych wypłat $[V_{i,1}, V_{i,2}, \cdot, V_{i,J}]$. Porównywanie tych wektorów wymaga① jednak dokonania stosownej agregacji. W teorii gier agregację tę nazywa się zwykle zastosowaniem określonego **kryterium wyboru strategii**. Kryterium to w charakterystyczny sposób przekształca wektor wypłat gracza w wielkość skalarną. W takiej sytuacji gracz jest zainteresowany wyborem strategii, dla której, uzyskana w wyniku zastosowania określonego kryterium wyboru strategii, wielkość skalarna przyjmuje – w zależności od przyjętej konwencji, jak również zastosowanego kryterium – wartość największą lub najmniejszą.

Jak wcześniej zasygnalizowano, różne formy agregacji mogą nie doprowadzić do rozróżnienia dwóch różnych wektorów wypłat, przypisać im jednakową wartość skalarną, a odpowiadające im decyzje (rozwiązania) czynić niejednoznaczne. W tej sytuacji, w celu wyłonienia wektora lepszego (a co się z tym wiąże i lepszej decyzji), trzeba zastosować inne kryterium, a więc dokonać regularyzacji tych niejednoznacznych rozwiązań. Jednak nie wszystkie formy regularyzacji (nie wszystkie zestawienia kryteriów) są użyteczne. Bywają bowiem takie, które – w przypadku uzyskania określonego, niejednoznacznego w sensie jednego kryterium zbioru rozwiązań – nie są w stanie nigdy zredukować liczności tego zbioru, czyli w ostateczności wskazać, które z rozwiązań są lepsze, a które są gorsze.

W dalszej części artykułu przedstawiono kilka znanych z literatury (w tym również autorskie) [1, 6, 9, 11, 14] kryteriów wyboru strategii w grach przeciwko naturze, a następnie pokazano użyteczne i nieużyteczne zestawienia tych kryteriów w procesie regularyzacji.

Kryteria wyboru strategii

W niniejszym punkcie zostaną omówione cztery powszechnie znane kryteria: Walda, optymistyczne, Laplace'a oraz Savage'a, jak również jedno kryterium autorskie – kryterium LNW②. Kryteria te zostaną sformułowane w swoich szczególnych i ogólnych postaciach.

① *Poza przypadkami dominacji, kiedy to z dokładnością do uszeregowania wartości wypłat w wektorach (np. od najmniejszego do największego) wartości wszystkich wypłat w jednym z wektorów będą większe od wypłat w drugim wektorze lub im równe.*
② *Więcej kryteriów zaproponowanych przez autora można znaleźć w [6].*

Kryterium Walda

Jest to procedura wyboru strategii, charakteryzująca się największą awersją do ryzyka. Decydent – gracz A zakłada tu, że zdarzy się sytuacja najbardziej niekorzystna (ukształtuje się taki stan natury n_j, który dla danej strategii gracza A da mu wypłatę najgorszą z możliwych) i w takich warunkach jest określana najlepsza strategia (gracza A). Jest to tak zwana strategia **maxminowa**[①]. Dla każdej strategii a_i jest określana najmniejsza z możliwych wypłat, a następnie jest wybierana ta strategia, która tę wypłatę maksymalizuje.

Przy założeniu, że $V_{i,j}$ oznacza wartość wypłaty dla gracza A, gdy wybrał on strategię a_i, i stanu natury n_j, kryterium Walda definiuje następujące zadanie optymalizacji:

$$\max\{\min_j V_{i,j} : i \in I_A\}. \tag{1}$$

Dla przykładu, jeżeli macierz wypłat gracza A ma postać jak w tablicy 2[②], to minimalne wypłaty dla poszczególnych jego strategii wynoszą:

$$\begin{aligned}
&\min\nolimits_j V_{1,j} = V_{1,3} = 0,\\
&\min\nolimits_j V_{2,j} = V_{2,1} = V_{2,2} = V_{2,3} = V_{2,4} = 1,\\
&\min\nolimits_j V_{3,j} = V_{3,1} = V_{3,3} = V_{3,4} = 0,\\
&\min\nolimits_j V_{4,j} = V_{4,3} = V_{4,4} = 0.
\end{aligned}$$

Maksymalną z najmniejszych wygranych gwarantuje tu strategia a_2 i na nią wskaże kryterium Walda.

Tabl. 2. Macierz wypłat gracza A – kryterium Walda wskazuje strategię a_2

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4
a_1	2	2	0	1
a_2	1	1	1	1
a_3	0	4	0	0
a_4	1	3	0	0

Kryterium Walda sformułowane w postaci (1), którą można nazwać postacią **szczególną**, może prowadzić do niejednoznaczności rozwiązania, tzn., nie wyłonić jednej strategii najlepszej w sensie tego kryterium, lecz ich zbiór, mimo że któraś ze strategii będzie wyraźnie lepsza. Zostanie to rozpatrzone na przykładzie macierzy wypłat z tablicy 3. W tym przypadku kryterium Walda w postaci (1) wskaże na dwie strategie a_2 i a_5 gracza A, nie rozróżniając ich między sobą, mimo że strategia a_5 jest tu wyraźnie lepsza.

Przykład ten uzasadnia sformułowanie kryterium Walda w postaci **ogólnej**. Jeśli dla każdej strategii pierwszy z najgorszych elementów macierzy wypłat nie identyfikuje jednoznacznie strategii najlepszej, to jest sprawdzany element następny. Jest to zatem przykład tzw. **leksykograficznej optymalizacji** [9].

① *Minmaxowa przy odwrotnej interpretacji.*

② *Przykład zaczerpnięto z pracy [11].*

W przykładzie z tablicy 3 kolejne porównania strategii przebiegałyby w następujący sposób. W pierwszym kroku zostają wybrane strategie a_2 i a_5, z najmniejszą wypłatą równą $V_{2,1} = V_{2,2} = V_{2,3} = V_{2,4} = V_{5,1} = V_{5,3} = 1$. W drugim kroku sytuacja w dalszym ciągu pozostaje nie rozstrzygnięta. Druga z najmniejszych wypłat dla obu strategii jest równa 1. W trzecim kroku trzecia z najgorszych wypłat dla strategii a_2 (równa 1) jest już mniejsza niż dla strategii a_5 ($V_{5,2} = 3$). W tym momencie proces się kończy i zostaje wybrana strategia a_5.

Tabl. 3. Przykład macierzy wypłat, w której kryterium Walda w postaci szczególnej nie identyfikuje jednoznacznie najlepszej strategii

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4
a_1	2	2	0	1
a_2	1	1	1	1
a_3	0	4	0	0
a_4	1	3	0	0
a_5	1	3	1	6

W celu sformułowania kryterium Walda w postaci ogólnej zostanie wprowadzone przekształcenie porządkujące $\Theta(\mathbf{x})$, spełniające zależność:

$$\theta_1(\mathbf{x}) \leqslant \theta_2(\mathbf{x}) \leqslant ... \leqslant \theta_J(\mathbf{x}), \tag{2}$$

gdzie J oznacza liczbę składowych wektora $\mathbf{x}$. Przekształcenie to porządkuje elementy składowe wektora $\mathbf{x}$ w kolejności od najmniejszego do największego.

Korzystając z przekształcenia θ, kryterium Walda w postaci ogólnej przyjmie postać:

$$\operatorname{lex\,max}\{\theta_1(\mathbf{V}_i), \theta_2(\mathbf{V}_i), ...\theta_m(\mathbf{V}_i) : i \in I_A\}, \tag{3}$$

gdzie $\mathbf{V}_i$ jest wektorem wypłat dla strategii a_i gracza A.

Kryterium optymistyczne

Jest to procedura wyboru strategii, charakteryzująca się największym optymizmem. Zakłada, że zdarzy się sytuacja najbardziej korzystna (ukształtuje się taki stan natury n_j, który dla danej strategii gracza A da mu wypłatę najlepszą z możliwych) i w takich warunkach jest określana najlepsza strategia (gracza A). Dla każdej z własnych strategii jest określana najlepsza z możliwych wypłat, a następnie wybierana jest strategia, która tę wypłatę maksymalizuje.

Kryterium optymistyczne jest zdefiniowane przez następujące zadanie optymalizacji:

$$\max\{\max_j V_{i,j} : i \in I_A\}. \tag{4}$$

Jeśli macierz wypłat gracza A ma postać jak w tablicy 2, to maksymalne wypłaty dla poszczególnych strategii gracza A przedstawiają się następująco:

$$\max_j V_{1,j} = V_{1,1} = V_{1,2} = 2,$$

$$\max_j V_{2,j} = V_{2,1} = V_{2,2} = V_{2,3} = V_{2,4} = 1,$$

$$\max_j V_{3,j} = V_{3,2} = 4,$$

$$\max_j V_{4,j} = V_{4,2} = 3.$$

Maksymalną z największych wypłat gwarantuje tu strategia a_3 ($V_{3,2} = 4$) i na nią wskaże kryterium optymistyczne.

W sformułowaniu ogólnym kryterium optymistyczne będzie zdefiniowane poniższym zadaniem optymalizacji leksykograficznej:

$$\operatorname{lex}\max\left\{\theta_J(\mathbf{V}_i), \theta_{J-1}(\mathbf{V}_i), \ldots \theta_1(\mathbf{V}_i) : i \in I_A\right\}. \tag{5}$$

Kryterium Laplace'a

Jest to procedura wyboru strategii, skupiająca uwagę na wartości oczekiwanej wypłaty, jaką może uzyskać gracz A. Ponieważ brak jest informacji o prawdopodobieństwach wystąpienia poszczególnych stanów natury n_j, to z konieczności przyjmuje się, że są one jednakowo prawdopodobne. W tym przypadku – gdy prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych stanów natury są jednakowe – strategia maksymalizująca wartość oczekiwaną wypłaty jest tożsama ze strategią maksymalizującą sumę (po wszystkich stanach natury) wypłat.

Kryterium Laplace'a definiuje się w sposób następujący:

$$\max\left\{\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} V_{i,j} : i \in I_A\right\} \tag{6}$$

lub prościej

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{J} V_{i,j} : i \in I_A\right\}. \tag{7}$$

Jeśli macierz wypłat gracza A ma postać jak w tablicy 2, to sumy wypłat (po kolejnych stanach natury) dla poszczególnych strategii gracza A przedstawiają się następująco:

$$\textstyle\sum_j V_{1,j} = 5,$$

$$\textstyle\sum_j V_{2,j} = 4,$$

$$\textstyle\sum_j V_{3,j} = 4,$$

$$\textstyle\sum_j V_{4,j} = 4.$$

Maksymalną sumę wypłat daje tu strategia a_1 ($\sum_j V_{1,j} = 5$) i na nią wskaże kryterium Laplace'a.

Sformułowaniem ogólnym kryterium Laplace'a jest przypadek rozpatrywania tylko kilku wybranych, największych lub najmniejszych wypłat dla każdej strategii. Dla przypadku rozpatrywania sumy k największych wypłat kryterium Laplace'a wyrazi się zależnością:

$$\max\left\{\sum_{j=0}^{k-1}\theta_{J-j}(\mathbf{V}_i) : i \in I_A\right\}, \tag{8}$$

natomiast dla przypadku sumy k najmniejszych wypłat – zależnością:

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{k}\theta_{j}(\mathbf{V}_i) : i \in I_A\right\}. \tag{9}$$

Warto zauważyć, że szczególnym przypadkiem (dla $k = 1$) kryterium Laplace'a w postaci (8) będzie kryterium optymistyczne (4), a dla postaci (9) kryterium Walda (1)[①].

Kryterium Savage'a

Kryterium to opiera się na obserwacji, że czasami wartość otrzymanej wypłaty ocenia się nie pod kątem jej bezwzględnej wartości, ale w porównaniu z najlepszą możliwą do osiągnięcia wypłatą, przy założeniu ustalonego stanu natury. Jest to wyrazem tendencji do minimalizowania poczucia straty (utraconej korzyści). Dla każdego z możliwych stanów natury n_j określa się wartość straty – w stosunku do wartości najmniejszej – jaką poniósłby gracz A, wybierając daną strategię. Wartość straty gracza A jest określana tu jako różnica maksymalnej wypłaty $V_{j\max}$, jaką mógłby otrzymać gracz A, i wypłaty, jaką otrzyma, wybierając strategię a_i. Funkcję, która każdej wartości wypłaty z macierzy wypłat przyporządkuje wartość straty, nazywa się **funkcją straty** (czy **funkcją żalu**).

Maksymalną wypłatę gracza A, przy ustalonym stanie natury n_j, można wyznaczyć z zależności:

$$V_{j\max}^{A} = \max_i V_{i,j}, \tag{10}$$

natomiast funkcja straty będzie się wyrażać zależnością:

$$\widetilde{V}_{i,j} = V_{j\max} - V_{i,j}. \tag{11}$$

Zależność (11) umożliwia przekształcenie oryginalnej macierzy wypłat w macierz strat.

Kryterium Savage'a wskazuje na taką strategię, która minimalizuje maksymalną stratę. Jest to więc strategia **minmaxowa** dla macierzy strat:

$$\min\{\max_j \widetilde{V}_{i,j} : i \in I_A\}. \tag{12}$$

① *Innym przykładem uogólnienia kryteriów Walda i optymistycznego jest tzw. kryterium Hurwicza, będące ważoną sumą obu kryteriów [11].*

Jeśli macierz wypłat gracza A jest jak w tablicy 4, wówczas odpowiadająca jej macierz strat przyjmie postać jak w tablicy 5.

Tabl. 4. Macierz wypłat gracza A – kryterium Savage'a wskazuje na strategię a_4

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4
a_1	2	2	0	1
a_2	1	1	1	1
a_3	0	4	0	0
a_4	1	3	0	0

Tabl. 5. Macierz strat gracza A – kryterium Savage'a wskazuje na strategię a_4

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4
a_1	0	2	1	0
a_2	1	3	0	0
a_3	2	0	1	1
a_4	1	1	1	1

W miejscach gdzie w macierzy wypłat (tabl. 4) była wartość największa w kolumnie, w macierzy strat (tabl. 5) znajduje się wartość zerowa. Maksymalne wartości strat dla poszczególnych strategii gracza A przedstawiają się następująco:

$$\max_j \widetilde{V}_{1,j} = \widetilde{V}_{1,2} = 2,$$
$$\max_j \widetilde{V}_{2,j} = \widetilde{V}_{2,2} = 2,$$
$$\max_j \widetilde{V}_{3,j} = \widetilde{V}_{3,1} = 2,$$
$$\max_j \widetilde{V}_{4,j} = \widetilde{V}_{4,1} = \widetilde{V}_{4,2} = \widetilde{V}_{4,3} = \widetilde{V}_{4,4} = 1.$$

Minimalną z największych strat gwarantuje strategia a_4 i na nią wskaże kryterium Savage'a.

Ogólnie kryterium Savage'a wyraża się zależnością:

$$\text{lex min}\left\{\theta_J(\widetilde{\mathbf{V}}_i), \theta_{J-1}(\widetilde{\mathbf{V}}_i), \ldots \theta_1(\widetilde{\mathbf{V}}_i) : i \in I_A\right\}. \tag{13}$$

Kryterium maksymalizacji liczby największych wygranych (LNW)

Przez pojęcie **największa wygrana** rozumie się wypłatę, której w macierzy strat odpowiada wartość zerowa. Kryterium LNW stosuje się w sytuacjach, kiedy gracz dąży nie do minimalizacji wartości straty, jak to było w przypadku kryterium Savage'a, lecz do minimalizacji prawdopodobieństwa powstania straty. Innymi słowy, kryterium to wskazuje na strategię, mającą najwięcej takich wypłat, którym w macierzy strat odpowiada wartość zerowa. Kryterium to zostanie przedstawione w dwóch postaciach – postaci minimalizacji najmniejszej straty i maksymalizacji liczby największych wygranych.

Kryterium LNW – postać minimalizacji najmniejszej straty

Kryterium Savage'a można interpretować jako zastosowanie kryterium Walda do macierzy strat[①]. Natomiast zastosowanie kryterium optymistycznego do macierzy strat daje w wyniku kryterium w postaci:

$$\min\{\min_{j} \widetilde{V}_{i,j} : i \in I_A\}, \tag{14}$$

gdzie $\widetilde{V}_{i,j}$ jest funkcją strat zdefiniowaną zależnością (11).

Kryterium w postaci (14) prowadzi zawsze do niejednoznaczności. Wyjątkiem jest sytuacja, gdy jedna strategia dominuje wszystkie pozostałe. Wynika to stąd, że tam, gdzie w macierzy wypłat znajduje się wartość największa w kolumnie ($V^A_{j\max}$), tam w macierzy strat odpowiednia wartość funkcji straty (11) przyjmuje wartość zero.

Porównując macierz wypłat w tablicy 4 i odpowiadającą jej macierz strat w tablicy 5, łatwo zauważyć, że dla trzech strategii (a_1, a_2 i a_3) gracza A – minimalna wartość straty wynosi zero ($\widetilde{V}_{1,1} = \widetilde{V}_{2,3} = \widetilde{V}_{3,2} = 0$), czyli kryterium w postaci (14), nie wyłoni jednoznacznego rozwiązania. Konieczne jest więc wprowadzenie sformułowania ogólnego:

$$\text{lex min}\left\{\theta_1(\widetilde{\mathbf{V}}_i), \theta_2(\widetilde{\mathbf{V}}_i), \ldots \theta_J(\widetilde{\mathbf{V}}_i) : i \in I_A\right\}. \tag{15}$$

Tak sformułowane kryterium szuka w pierwszej kolejności strategii, która w macierzy strat ma najwięcej zer. Ponieważ wartościom zero w macierzy strat odpowiadają największe wartości wypłat w macierzy wypłat, stąd można powiedzieć, że kryterium w postaci (15) minimalizuje liczbę wypłat gracza A różnych od maksymalnej, a zatem maksymalizuje liczbę największych wygranych (LNW).

W przypadku gdy dwie strategie (lub więcej) mają w macierzy strat tyle samo wartości zerowych, wówczas w macierzy strat są rozpatrywane kolejne wartości – od najmniejszej do największej.

Dla przykładu zostanie przeanalizowana gra, w której macierz wypłat gracza A jest jak w tablicy 6[②].

Tabl. 6. Macierz wypłat gracza A

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
a_1	**2**	2	0	**1**	0
a_2	1	1	**1**	**1**	0
a_3	0	**4**	0	0	0
a_4	1	3	0	0	0
a_5	**2**	0	0	**1**	**1**

① *Istotą kryterium Walda jest podejście pesymistyczne, zakładające wystąpienie najgorszego przypadku. W tej sytuacji poszukuje się strategii, w której najgorsza wartość wypłaty jest najlepsza spośród wypłat wszystkich możliwych strategii. Stąd postać maxminową, stosowaną do macierzy wypłat, wolno zamienić na postać minmaxową, jeśli będzie rozpatrywna macierz strat.*

② *Dla większej czytelności, wartości maksymalne w każdej kolumnie j ($V_{j\max}$) zostały wytłuszczone.*

Odpowiadającą jej macierz strat zilustrowano w tablicy 7. W tym przypadku każde z wcześniej omawianych kryteriów, jak również przedstawione tu kryterium LNW w postaci (15), wskazuje na inną strategię, a mianowicie:

- kryterium Laplace'a na strategię a_1,
- kryterium Walda na strategię a_2,
- kryterium optymistyczne na strategię a_3,
- kryterium Savage'a na strategię a_4,
- kryterium LNW na strategię a_5.

Tabl. 7. Macierz strat gracza A

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
a_1	**0**	2	1	**0**	1
a_2	1	3	**0**	**0**	1
a_3	2	**0**	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1
a_5	**0**	4	1	**0**	**0**

Wskazywana przez kryterium LNW strategia a_5 zawiera najwięcej (3) maksymalnych wartości w kolumnach wypłat (najwięcej zer w macierzy strat).

Kryterium LNW – postać maksymalizacji liczby największych wygranych

Kryterium LNW w postaci (15) minimalizuje liczbę wypłat gracza A różnych od maksymalnej ($V_{j\max}$), co można wyrazić jako maksymalizację liczby największych wygranych. Poniżej zaprezentowano alternatywne sformułowanie tego kryterium.

Zostanie wprowadzone przekształcenie Φ, takie że:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \leqslant 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

Przekształcenie Φ może być sformułowane w bardzo różny sposób. Jeden z nich opisuje zależność:

$$\Phi(x) = \frac{\text{sign}(-x)+1}{2}, \tag{16}$$

gdzie funkcja $\text{sign}(x)$ zwraca wartość $+1$ dla $x \geqslant 0$ oraz -1 dla $x < 0$.

Korzystając z przekształcenia Φ, można przedstawić kryterium LNW w postaci:

$$\max\left\{ \sum_j \Phi(\widetilde{V}_j^A(a_i)) : i \in I_A \right\}. \tag{17}$$

Kryterium LNW w postaci (17), choć bardziej czytelnie oddaje zawartą w nim ideę wyboru strategii – konkretne rozumowanie, uzasadniające podjętą decyzję (maksymalizacja liczby największych wygranych) – to, z punktu widzenia eliminacji niejednoznaczności rozwiązań, jest słabsze niż kryterium LNW w postaci (15). Jest ono jednak zdecydowanie lepsze niż kryterium w postaci (14). Kryterium w postaci (17) z pewnością wskaże te strategie, które mają najwięcej największych wygranych. Nie można jednak na jego podstawie rozróżnić strategii, które – mając taką samą liczbę maksymalnych wypłat – różnią się na pozostałych pozycjach wektora wypłat, a takie rozróżnienie uzyska się z kryterium w postaci (15). Sytuację tę ilustruje macierz wypłat przedstawiona w tablicy 8.

Tabl. 8. Macierz wypłat gracza A – kryterium LNW w postaci maksymalizacji liczby największych wygranych prowadzi do niejednoznaczności

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4
a_1	**2**	2	**1**	0
a_2	1	0	**1**	**1**
a_3	0	**4**	0	0
a_4	1	3	0	0

W tym przypadku kryterium LNW w postaci (17) wyłoni dwie równoważne strategie a_1 i a_2 z dwoma maksymalnymi wygranymi. Łatwo zauważyć, że strategia a_1 jest wyraźnie lepsza (z dokładnością do uporządkowania składowych wektora wypłat strategia a_1 dominuje[①] nad strategią a_2). Kryterium LNW w postaci (15) wskazałoby tu jednoznacznie na strategię a_1.

Jednakże kryterium LNW w postaci (17) jest prostsze w obliczeniach niż kryterium w postaci (15) i jest to jego istotna zaleta. Implementacja leksykograficznej optymalizacji – konieczna w przypadku sformułowania (15) – nie jest prosta. Ponadto postać ta umożliwia wprowadzenie uogólnionej postaci kryterium LNW, tzw. **kryterium maksymalizacji liczby największych wygranych z progiem uznania** [6].

Problem niejednoznaczności, którego dla macierzy wypłat (tabl. 8) kryterium LNW w postaci (17) nie jest w stanie rozstrzygnąć, łatwo można rozwiązać, wprowadzając następującą modyfikację:

$$\max\left\{\sum_j V_{i,j}\cdot\Phi(\widetilde{V}_{i,j}) : i \in I_A\right\}. \tag{18}$$

Niestety tak zmodyfikowane kryterium w szczególnych przypadkach traci swoją właściwość wyłaniania strategii o największej liczbie maksymalnych wygranych. Może się bowiem zdarzyć, że dla dwóch strategii a_i oraz a_k takich, że strategia a_i ma więcej maksymalnych wygranych niż strategia k, może zachodzić zależność $\sum_j V_{i,j} < \sum_k V_{k,j}$. W tym przypadku kryterium w postaci (18) wskaże na strategię a_k, co nie jest zgodne z ideą kryterium liczby największych wygranych LNW.

① *Relację dominacji rozumie się tu w następujący sposób: strategia a_i dominuje strategię a_k wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego j zachodzi zależność $V_{i,j} \geqslant V_{k,j}$ i przynajmniej dla jednego j zachodzi nierówność ostra.*

Ilustruje to przykład z macierzą wypłat jak w tablicy 9 i odpowiadającą jej macierzą strat pokazaną w tablicy 10.

***Tabl. 9. Macierz wypłat gracza* A *– zmodyfikowane kryterium LNW (18) wskazuje na strategię* a_2*, mimo że najwięcej maksymalnych wygranych ma strategia* a_1**

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
a_1	**2**	**1**	**1**	1	1
a_2	**2**	0	0	**3**	1
a_3	1	0	0	1	**4**
a_4	**2**	0	**1**	2	2
a_5	0	**1**	**1**	2	3

***Tabl. 10. Macierz strat gracza* A *– zmodyfikowane kryterium LNW (18) wskazuje na strategię* a_2*, mimo że najwięcej maksymalnych wygranych ma strategia* a_1**

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
a_1	**0**	**0**	**0**	2	3
a_2	**0**	1	1	**0**	3
a_3	1	1	1	2	**0**
a_4	**0**	1	**0**	1	2
a_5	1	**0**	**0**	1	1

Mimo że strategia a_1 ma najwięcej (trzy) największych wygranych, kryterium w postaci (18) wskazuje tym razem na strategię a_2, suma bowiem z największych wygranych jest dla tej strategii największa ($3+2=5$). Widać zatem, że kryterium w postaci (18) jest innym kryterium niż kryterium LNW[①].

Regularyzacja rozwiązań niejednoznacznych z użyciem kryteriów wyboru strategii

Przez pojęcie **regularyzacja** rozumie się proces usuwania niejednoznaczności rozwiązania otrzymanego przez wybór strategii na podstawie kryterium X, przez zastosowanie innego kryterium wyboru Y. Innymi słowy, jeśli przy wykorzystaniu danego kryterium wyboru otrzyma się dwie lub więcej strategii – ogólnie zbiór strategii – nierozróżnialnych w sensie tego kryterium, to, stosując do tych strategii inne kryterium wyboru, zbiór ten można zredukować. W szczególnym przypadku można wyłonić jedną, najlepszą w tym sensie strategię. Proces regularyzacji rozwiązania otrzymanego w wyniku stosowania kryterium X, przez kryterium Y będzie umownie oznaczony $X:Y$.

① *W pracy [6] kryterium to zostało nazwane „kryterium maksymalizacji sumy z największych wypłat”.*

Jak to zasygnalizowano we wprowadzeniu, nie każde zestawienie kryteriów wyboru jest użyteczne. Użyteczne zestawienie kryteriów X i Y jest to zestawienie, dla którego istnieje taka macierz wypłat, że kryterium X wyłania z niej co najmniej dwie strategie w jego sensie nierozróżnialne, a kryterium Y liczność tego zbioru redukuje, w szczególności wyłania jedną strategię najlepszą w sensie $X : Y$. Nieużyteczne zaś będzie takie zestawienie $X : Y$, dla którego taka macierz nie istnieje.

Poniżej przedstawiono użyteczne i nieużyteczne zestawienia kryteriów w procesie regularyzacji.

1. Regularyzacje użyteczne:
   a) kryterium Laplace'a : kryterium Walda (Lap : Wal),
   b) kryterium Laplace'a : kryterium optymistyczne (Lap : Opt),
   c) kryterium Laplace'a : kryterium Savage'a (Lap : Sav),
   d) kryterium Laplace'a : kryterium LNW (Lap : LNW),
   e) kryterium Walda : kryterium Savage'a (Wal : Sav),
   f) kryterium Walda : kryterium LNW (Wal : LNW),
   g) kryterium optymistyczne : kryterium Savage'a (Opt : Sav),
   h) kryterium optymistyczene : kryterium LNW (Opt : LNW),
   i) kryterium Savage'a : kryterium Walda (Sav : Wal),
   j) kryterium Savage'a : kryterium optymistyczne (Sav : Opt),
   k) kryterium LNW : kryterium Walda (LNW : Wal),
   l) kryterium LNW : kryterium optymistyczne (LNW : Opt).
2. Regularyzacje nieużyteczne:
   a) kryterium Walda : kryterium optymistyczne (Wal : Opt),
   b) kryterium Walda : kryterium Laplace'a (Wal : Lap),
   c) kryterium optymistyczne : kryterium Walda (Opt : Wal),
   d) kryterium optymistyczne : kryterium Laplace'a (Opt : Lap),
   e) kryterium Savage'a : kryterium Laplace'a (Sav : Lap),
   f) kryterium Savage'a : kryterium LNW (Sav : LNW),
   g) kryterium LNW : kryterium Laplace'a (LNW : Lap),
   h) kryterium LNW : kryterium Savage'a (LNW : Sav).

W kolejnych przykładach zostanie wykazana prawdziwość podanej klasyfikacji.

Przykład 1

Macierz wypłat gracza A przedstawia się jak w tablicy 11, a odpowiadająca jej macierz strat jak w tablicy 12. W tej sytuacji kryteria Walda, optymistyczne i Laplace'a wyłonią dwie, nierozróżnialne w ich sensie strategie a_1 i a_2 gracza A. Jeśli zastosuje się regularyzację z wykorzystaniem kryterium Savage'a, to zostanie wybrana strategia a_1. Natomiast kryterium LNW wyłoni strategię a_2.

Tabl. 11. Regularyzacja – macierz wypłat: usunięcie niejednoznaczności rozwiązań otrzymanych w wyniku stosowania kryteriów Walda, optymistycznego i Laplace'a przez kryteria Savage'a i LNW

Strategie	n_1	n_2	n_3
a_1	4	2	1
a_2	1	4	2
a_3	0	4	2

Tabl. 12. Regularyzacja – macierz strat: usunięcie niejednoznaczności rozwiązań otrzymanych w wyniku stosowania kryteriów Walda, optymistycznego i Laplace'a przez kryteria Savage'a i LNW

Strategie	n_1	n_2	n_3
a_1	0	2	1
a_2	3	0	0
a_3	4	0	0

W ten sposób uzasadniono użyteczność regularyzacji Wal : Sav (1e), Opt : Sav (1g), Lap : Sav (1c), Wal : LNW (1f), Opt : LNW (1h) oraz Lap : LNW (1d).

□

Przykład 2

Macierz wypłat gracza A ma postać jak w tablicy 13. W tym przypadku kryterium Laplace'a wskazuje na dwie nierozróżnialne w jego sensie strategie a_1 i a_2. Natomiast zastosowanie regularyzacji

Tabl. 13. Regularyzacja – macierz wypłat: usunięcie niejednoznaczności rozwiązań otrzymanych w wyniku stosowania kryterium Laplace'a przez kryteria Walda i optymistyczne

Strategie	n_1	n_2	n_3
a_1	3	2	2
a_2	1	4	2
a_3	0	4	2

z wykorzystaniem kryterium Walda wskaże jednoznacznie strategię a_1, natomiast kryterium optymistyczne strategię a_2. Jest to uzasadnienie użyteczności regularyzacji Lap : Wal (1a) i Lap : Opt (1b).

□

Przykład 3

Macierz wypłat gracza A ma postać jak w tablicy 14, a odpowiadająca jej macierz strat jak w tablicy 15. Kryterium Savage'a wskazuje tu na dwie, nierozróżnialne w jego sensie strategie a_1 i a_2 gracza A.

Tabl. 14. Regularyzacja – macierz wypłat: usunięcie niejednoznaczności rozwiązań otrzymanych w wyniku stosowania kryterium Savage'a przez kryteria Walda i optymistyczne

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
a_1	1	1	1	2	4
a_2	0	4	0	1	4
a_3	2	4	3	2	0

Tabl. 15. Regularyzacja – macierz strat: usunięcie niejednoznaczności rozwiązań otrzymanych w wyniku stosowania kryterium Savage'a przez kryteria Walda i optymistyczne

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
a_1	1	3	2	0	0
a_2	2	0	3	1	0
a_3	0	0	0	0	4

Zastosowanie regularyzacji z wykorzystaniem kryterium Walda wskaże jednoznacznie strategię a_1, natomiast kryterium optymistyczne strategię a_2. Uzasadniono tym samym użyteczność regularyzacji Sav : Wal (1i) i Sav : Opt (1j). □

Przykład 4

Macierz wypłat gracza A ma postać jak w tablicy 16, a odpowiadająca jej macierz strat przedstawia się jak w tablicy 17.

Tabl. 16. Regularyzacja – macierz wypłat: usunięcie niejednoznaczności rozwiązań otrzymanych w wyniku stosowania kryterium LNW przez kryteria Walda i optymistyczne

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
a_1	2	4	0	3	5
a_2	1	4	2	3	4
a_3	1	3	1	2	6

Kryterium LNW wskazuje tu na dwie, nierozróżnialne w jego sensie strategie – a_1 i a_2 gracza A. Zastosowanie regularyzacji z wykorzystaniem kryterium Walda wskaże jednoznacznie strategię a_2, natomiast kryterium optymistyczne strategię a_1.

Tabl. 17. Regularyzacja – macierz strat: usunięcie niejednoznaczności rozwiązań otrzymanych w wyniku stosowania kryterium LNW przez kryteria Walda i optymistyczne

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
a_1	0	0	2	0	1
a_2	1	0	0	0	2
a_3	1	1	1	1	6

Uzasadniono więc użyteczność regularyzacji LNW : Wal (1k) i LNW : Opt (1l).

□

Poniżej zostanie wykazana nieużyteczność następujących regularyzacji:

Wal : Opt (2a),

Wal : Lap (2b),

Opt : Wal (2c),

Opt : Lap (2d),

Sav : Lap (2e),

Sav : LNW (2f),

LNW : Lap (2g),

LNW : Sav (2h).

Wektory wypłat odpowiadające dwóm strategiom nierozróżnialnym w sensie kryterium optymistycznego czy Walda są wektorami jednakowymi z dokładnością do porządku, tzn. porządkując składowe tych wektorów w kolejności od wartości najmniejszej do największej lub odwrotnie, otrzyma się dwa jednakowe wektory. W szczególności suma poszczególnych składowych tych wektorów jest jednakowa. Stąd wynika stwierdzenie o nieużyteczności regularyzacji Wal : Opt (2a), Wal : Lap (2b), Opt : Wal (2c) i Opt : Lap (2d).

Podobnie jest z wektorami w macierzy strat, na których operują kryteria Savage'a i LNW, a więc regularyzacje Sav : LNW (2f) i LNW : Sav (2h) są także nieużyteczne. Nieużyteczność regularyzacji Sav : Lap (2e) i LNW : Lap (2g) wynika z następującego rozumowania: zastosowanie kryterium Laplace'a do macierzy wypłat daje w efekcie ten sam rezultat, co zastosowanie go do macierzy strat[1]. Kryterium Savage'a można interpretować jako zastosowanie kryterium Walda do macierzy strat,

[1] *Kryterium Laplace'a (maksymalizacji wartości oczekiwanej wypłaty) jest tożsame z kryterium „expected opportunity loss", polegającym na minimalizacji wartości oczekiwanej straty [1].*

zatem, na mocy stwierdzenia o nieużyteczości regularyzacji Wal : Lap, stwierdza się nieużyteczność regularyzacji Sav : Lap. Natomiast kryterium LNW można interpretować jako zastosowanie kryterium optymistycznego do macierzy strat, stąd, na mocy stwierdzenia nieużyteczności regularyzacji Opt : Lap, wnioskuje się o nieużyteczności regularyzacji LNW : Lap.

Zakończenie

Wspomniana we wprowadzeniu wielowymiarowość problemów decyzyjnych, jak również wielość kryteriów, według których decydenci oceniają jakość uzyskanych rozwiązań, skłaniają do stosowania metod właściwych dla analizy wielokryterialnej. Jedną z takich metod jest regularyzacja rozwiązań, niejednoznacznych z wykorzystaniem określonej metody skalaryzacji wektorów wypłat (określonego kryterium wyboru strategii). Na przykładzie kilku wybranych, powszechnie stosowanych podejść do problemu decyzyjnego o modelu gry przeciwko naturze pokazano, że metoda ta ma swoje granice, a w szczególności, że nie każda forma regularyzacji ma sens.

Bibliografia

[1] *Decision theory and games*, www.actuarial.unsw.edu.au/courses/actl3003/documents/LectureNotes/lecturenote10.pdf

[2] Granat J.: *Metody interakcji z użytkownikiem w wielokryterialnych systemach wspomagania decyzji*. Rozprawa doktorska. Warszawa, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 1997

[3] Granat J., Makowski M.: *Interactive specification and analysis of aspiration-based preferences*. European Journal of Operational Research, 2000, vol. 122, s. 469–485

[4] Kostreva M. M., Ogryczak W., Wierzbicki A. W.: *Equitable aggregations and multiple criteria analysis*. European Journal of Operational Research, 2004, vol. 158, s. 362–377

[5] Kręglewski T., Granat J., Wierzbicki A. P.: *IAC-DIDAS-N, A Dynamic Interactive Decision Analysis and Support System for Multicriteria Analysis of Nonlinear Models*, vol. 4.0. Laxenburg, International Institute for Applied Systems Analysis, 1991

[6] Laskowski S.: *Criteria of choosing strategy in games against nature*. W: Materiały z konferencji *The Fifth International Conference on Decision Support for Telecommunications and Information Society*, Warszawa, 2005

[7] Laskowski S.: *Game against nature: playing on competitive telecommunications services market without knowledge of competitors' costs*. W: Materiały z konferencji *The Fourth International Conference on Decision Support for Telecommunications and Information Society*, Warszawa, 2004

[8] Makowski M., Granat J.: *Multicriteria analysis of large sets of alternatives*. W: Materiały z konferencji *21st Workshop on Methodologies and Tools for Complex System Modeling and Integrated Policy Assessment*, Laxenburg, 2007

[9] Ogryczak W.: *Wspomaganie decyzji w warunkach ryzyka*. Skrypt wykładu. Warszawa, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, 2002

[10] Roy B.: *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1990

[11] Straffin P. D.: *Teoria gier*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe Scholar, 2001

[12] Wierzbicki A. P.: *Optymalizacja i wspomaganie decycji*. Skrypt wykładu. Warszawa, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, 2000

[13] Wierzbicki A. P.: *Reference point methods in vector optimization and decision support*. Interim Report IR-98-017, Laxenburg, International Institute for Applied Systems Analysis, 1998

[14] Worobiew N. N., Kofler E., Greniewski H.: *Strategia gier*. Warszawa, Książka i Wiedza, 1969

Sylwester Laskowski

Dr inż. Sylwester Laskowski (1973) – absolwent Wydziału Elektroniki i Technik Informacyjnych Politechniki Warszawskiej (1999); absolwent Wydziału Instrumentalnego Warszawskiej Akademii Muzycznej (2003); pracownik naukowy Instytutu Łączności w Warszawie (od 2004); zainteresowania naukowe: techniki informacyjne, wspomaganie decyzji, analiza wielokryterialna, sztuka i technika negocjacji, teoria gier, rynek telekomunikacyjny i współpraca międzyoperatorska.
e-mail: S.Laskowski@itl.waw.pl