

MINISTERSTWO ŁĄCZNOŚCI

PRACE  
INSTYTUTU ŁĄCZNOŚCI

ROK XI

ZESZYT 1 (34)

WARSZAWA 1964

WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE

## SPIS TREŚCI

	Str.
1. <i>Bogdan Tor</i> — Modulacja częstotliwościowa i modulacja amplitudowa w urządzeniach radiokomunikacji ruchomej . . . . .	3
2. <i>Zbigniew Dudziński</i> — Matematyczne rozwiązanie modelu sieci telekomunikacyjnej za pomocą algorytmu simpleks . . . . .	41

## СОДЕРЖАНИЕ

1. <i>Б. Тор</i> — Частотная модуляция и амплитудная модуляция в аппаратуре Подвижной радиосвязи . . . . .	3
2. <i>Зб. Дудзински</i> — Математическое решение модели сети дальней связи с помощью алгоритма симплексного метода . . . . .	41

## CONTENTS

1. <i>B. Tor</i> — Frequency modulation and amplitude modulation in the equipment of mobile services . . . . .	3
2. <i>Zb. Dudziński</i> — Mathematical method of solving a model of telecommunication network by means of the simplex algorithm . . . . .	41

## SOMMAIRE

1. <i>B. Tor</i> — Modulation de fréquence et modulation d'amplitude dans les équipements de services mobiles . . . . .	3
2. <i>Zb. Dudziński</i> — Solution mathématique d'un modèle du réseau des télécommunications à l'aide de l'algorithme simplex . . . . .	41

## INHALTSVERZEICHNIS

1. <i>B. Tor</i> — Frequenz- und Amplitudenmodulation bei beweglichen Funkeinrichtungen . . . . .	3
2. <i>Zb. Dudziński</i> — Mathematische Lösung des Modells eines Nachrichtennetzes laut der Simplex-Methode . . . . .	41

MINISTERSTWO ŁĄCZNOŚCI

PRACE  
INSTYTUTU ŁĄCZNOŚCI

ROK XI

ZESZYT 1 (34)

WARSZAWA 1964

WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE

Komitet Redakcyjny  
Redaktor naczelny — *prof. mgr inż. Józef Wójcikiewicz*

Redaktorzy działów:  
*adjunkt inż. Aleksy Brodowski, prof. mgr inż. Sylwester Jarkowski*  
*prof. mgr inż. Lesław Kędziński*  
Sekretarz Redakcji — *Edward Tomkiel*

Adres Redakcji  
Instytut Łączności, Warszawa-Miedzeszyn, ul. Szachowa 1

WSZELKIE PRAWA ZASTRZEŻONE

*Printed in Poland*

Rysunki dostarczył Komitet Redakcyjny

---

WNT Warszawa 1964. Wydanie 1. Nakład 539 egz. Ark. wyd. 5,9. Ark. druk. 6,32/A.  
Format B5. Pap. druk. kl. V, 70 g, 70×100/16. Oddano do składu 12. 5. 64. Podpisano  
do druku 10. 8. 64. Druk ukończono w sierpniu 1964. Symbol 80344/INB. Cena zi 22.—

---

Zakłady Graficzne im. M. Kasprzaka w Poznaniu 1017/64 — O-1

BOGDAN TOR

621.376 : 621.396.93

## MODULACJA CZĘSTOTLIWOŚCIOWA I MODULACJA AMPLITUDOWA W URZĄDZENIACH RADIOKOMUNIKACJI RUCHOMEJ

Rękopis dostarczono do Komitetu Redakcyjnego  
5. 4. 1962 r. (1 redakcja), 14. 11. 1963 r. (2 redakcja)

W pracy niniejszej opisano dwa rodzaje modulacji, tj. modulację amplitudową i częstotliwościową w zastosowaniu do urządzeń radiokomunikacji ruchomej. Opisano i przedyskutowano rozkład wstęp bocznych modulacji częstotliwościowej w zależności od małych wskaźników modulacji.

Przeanalizowano pracę modulatorów amplitudy i częstotliwości z uwzględnieniem obecnych wymagań technicznych dla urządzeń radiokomunikacji ruchomej. Przy opisie tych układów wykorzystano również materiał własnych prac prowadzonych w Instytucie Łączności.

### WSTĘP

W ciągu ostatnich kilku lat rozwój radiokomunikacji ruchomej jest bardzo szybki. W miarę wzrostu jej zastosowań w wielu dziedzinach życia gospodarczego powstają odpowiednie sieci radiokomunikacyjne. W sieciach radiokomunikacji ruchomej w Polsce jest stosowany częściowo sprzęt krajowy i częściowo również sprzęt zagraniczny. Jednak eksploatowane urządzenia nie są w większości dostosowane do obecnych wymagań technicznych. Urządzenia radiokomunikacji ruchomej są obecnie już objęte międzynarodowymi wymaganiami technicznymi (CCIR).

W Polsce zostały opracowane przez Instytut Łączności wymagania techniczne i metody pomiarowe dla lądowych urządzeń radiokomunikacji ruchomej, pracujących w zakresie fal metrowych, które zostały wprowadzone do obowiązkowego stosowania w przemyśle i eksploatacji.

W państwach socjalistycznych urządzenia radiokomunikacji ruchomej pracują obecnie w kilku pasmach częstotliwości leżących w zakresie fal metrowych. W Polsce są prowadzone od kilku lat prace obejmujące badania systemu radiokomunikacji ruchomej w zakresie fal decymetrowych (300—308 MHz i 336—344 MHz). W związku z tym przygotowuje się rów-

niez uruchomienie nowej produkcji krajowej sprzętu radiokomunikacji ruchomej, pracującego we wspomnianym zakresie częstotliwości.

Przy zaawansowanych więc pracach związanych z rozwojem omawianej dziedziny zakres publikowanych w literaturze krajowej prac teoretycznych, dotyczących zagadnień radiokomunikacji ruchomej, jest dotychczas stosunkowo mały.

W artykule niniejszym opisano dwa rodzaje modulacji, tj. modulację amplitudową i częstotliwościową w zastosowaniu do urządzeń radiokomunikacji ruchomej lądowej. Ze względu na potrzebę sprecyzowania zasadniczych pojęć dotyczących modulacji zostały przede wszystkim omówione podstawowe zależności charakteryzujące obydwa rodzaje modulacji.

Następnie opisano i przedyskutowano rozkład wstęg bocznych modulacji częstotliwościowej i amplitudowej oraz przeanalizowano pracę odpowiednich modulatorów z uwzględnieniem obecnych wymagań technicznych dla urządzeń radiokomunikacji ruchomej. W zakończeniu pracy zwrócono uwagę na aspekty rozwojowe układów modulacji w urządzeniach radiokomunikacji ruchomej.

## 1. PODSTAWOWE POJĘCIA O MODULACJI

W radiokomunikacji nadawane informacje są przekazywane z punktu nadawczego do punktu odbiorczego za pośrednictwem drgań elektromagnetycznych, wytwarzanych w nadajniku.

Zmianę (kształtowanie) prądów w.cz. nadajnika, w zależności od przebiegu sygnałów modulujących, nazywamy modulacją.

Jeżeli przesyłaną informacją będzie funkcja okresowa  $s(t)$ , to można ją przedstawić w postaci sumy

$$s(t) = \sum_{v=0}^{v=n} a_v \cdot \sin(\omega_v \cdot t + \varphi_v) \quad (1)$$

gdzie:

$a_v$  — amplituda składowej  $v$ ,

$\omega_v$  — pulsacja składowej  $v$ ,

$\varphi_v$  — kąt fazowy składowej  $v$ .

Na rysunku 1 jest podany schemat blokowy przesyłania informacji  $s(t)$  z punktu nadawczego do punktu odbiorczego. W idealnym przypadku, w punkcie odbiorczym B powinniśmy otrzymać taki sam przebieg  $s(t)$ , jaki mieliśmy przed modulatorem w punkcie nadawczym A.

W warunkach rzeczywistych na drodze przesyłania informacji istnieje cały szereg zniekształceń i zakłóceń, które zmniejszają wierność odtworzenia sygnału modulującego  $s(t)$ .

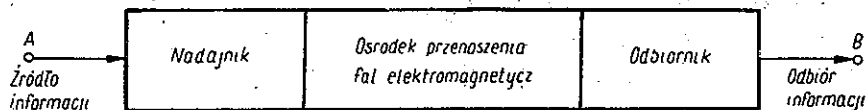
W nadajniku są wytwarzane drgania wielkiej częstotliwości, które można zapisać w ogólnej postaci matematycznej

$$u(t) = U \cdot \sin \Phi \quad (2)$$

gdzie:

$U$  — amplituda napięcia w.c.z.,

$\Phi$  — kąt fazowy napięcia w.c.z.



Rys. 1. Schemat blokowy przesyłania informacji

W zależności od tego, jak sygnał modulujący  $s(t)$  wpływa (za pośrednictwem modulatora) na zmianę przebiegu drgań wielkiej częstotliwości nadajnika, otrzymujemy odpowiednio różne rodzaje modulacji:

1) jeżeli w takt zmian sygnału modulującego  $s(t)$  zmienia się tylko amplituda  $U$  napięcia w.c.z. nadajnika, to wtedy mamy do czynienia z tzw. modulacją amplitudową;

2) jeżeli w takt zmian sygnału modulującego  $s(t)$  zmienia się kąt  $\Phi$  napięcia w.c.z. przy stałej amplitudzie  $U$ , to wtedy mamy do czynienia z tzw. modulacją kątową.

Rozróżniamy przy tym dwa przypadki modulacji kątowej:

a) tzw. modulację częstotliwościową, jeżeli zmiany wielkiej częstotliwości nadajnika są proporcjonalne do amplitudy sygnału modulującego  $s(t)$ ;

b) tzw. modulację fazową, jeżeli zmiany fazy napięcia w.c.z. nadajnika są proporcjonalne do amplitudy sygnału modulującego  $s(t)$ .

Oprócz takich rodzajów modulacji, przy których nadajnik pracuje z falą nośną ciągłą, są jeszcze inne, np. różne rodzaje modulacji impulsowych.

W niniejszej pracy zostaną rozpatrzone dwa rodzaje modulacji stosowane w radiokomunikacji ruchomej, tj. modulacja amplitudowa i modulacja częstotliwościowa.

W celu umożliwienia porównania układów z modulacją amplitudową i częstotliwościową należy uprzednio przypomnieć podstawowe zależności zachodzące przy tych rodzajach modulacji.

## 2. PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI ZACHODZĄCE PRZY MODULACJI AMPLITUDOWEJ

Zgodnie z definicją modulacji amplitudowej zależność (2) można napisać w postaci

$$u(t) = U [s(t)] \cdot \sin \Phi(t)$$

gdzie:

$$\Phi(t) = \Omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

skąd

$$u(t) = U[s(t)] \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + \varphi_0) \quad (3)$$

przy czym:

$$\Omega_0 = 2\pi \cdot F_0,$$

$U[s(t)]$  — amplituda napięcia w.cz.,

$\Omega_0$  — pulsacja fali nośnej,

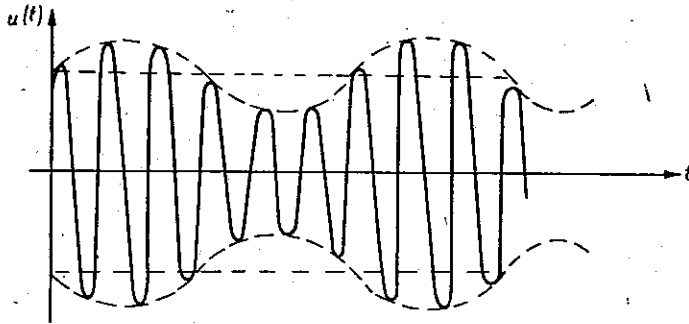
$F_0$  — częstotliwość fali nośnej,

$\varphi_0$  — faza,

$t$  — czas,

$s(t)$  — funkcja określająca sygnał modulujący.

Amplituda  $U[s(t)]$  jest funkcją czasu  $t$ .



Rys. 2. Przebieg napięcia  $u(t)$  w czasie przy modulacji amplitudowej

Jeżeli funkcja sygnału modulującego  $s(t)$  jest sinusoidalnie zmienna, to amplitudę  $U[s(t)]$  można przedstawić w postaci

$$U[s(t)] = U_0 \cdot (1 + m \cdot \sin \omega t) \quad (4)$$

gdzie:

$$\omega = 2\pi f,$$

$f$  — częstotliwość sygnału modulującego,

$m$  — głębokość modulacji amplitudowej,

$U_0$  — amplituda napięcia w.cz. bez modulacji.

Po podstawieniu wartości  $U[s(t)]$  do zależności (3) otrzymamy

$$u(t) = U_0 \cdot (1 + m \cdot \sin \omega t) \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + \varphi_0) \quad (5)$$

Przebieg napięcia  $u(t)$  w czasie  $t$  jest podany na rys. 2.

W celu przedstawienia widma częstotliwościowego modulacji amplitudowej przekształćmy zależność (5)

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \cdot (1 + m \cdot \sin \omega t) \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + \varphi_0) = \\ &= U_0 \cdot \sin(\Omega_0 t + \varphi_0) + m \cdot U_0 \cdot \sin \omega t \cdot \sin(\Omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

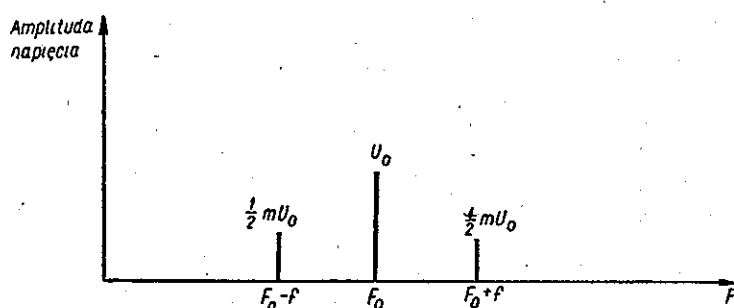


ponieważ

$$\sin \omega t \cdot \sin (\Omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} \cdot \{ \cos [(\Omega_0 - \omega) t + \varphi_0] - \\ - \cos [(\Omega_0 + \omega) t + \varphi_0] \}$$

czyli

$$u(t) = U_0 \cdot \sin (\Omega_0 \cdot t + \varphi_0) + \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot m \cdot \cos [(\Omega_0 - \omega) t + \varphi_0] - \\ - \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot m \cdot \cos [(\Omega_0 + \omega) t + \varphi_0] \quad (6)$$

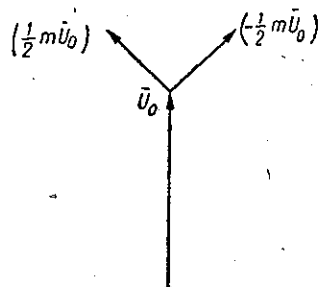


Rys. 3. Wykres składowych widma częstotliwości modulacji amplitudowej przy sinusoidalnym sygnale modulującym

Jak widać, przy modulacji jednym sygnałem sinusoidalnym o pulsacji  $\omega$  powstają trzy składowe napięcia o pulsacjach:

$$\Omega_0, (\Omega_0 - \omega) \text{ i } (\Omega_0 + \omega)$$

Składowe te można przedstawić jak na rys. 3. Dwie składowe o amplitudzie  $\frac{1}{2} m \cdot U_0$  i o częstotliwościach  $(F_0 - f)$  oraz  $(F_0 + f)$  nazywamy napięciami wstęg bocznymi.



Rys. 4. Wykres wektorowy napięć przy modulacji amplitudowej sinusoidalnym sygnałem modulującym

Zmodulowane napięcie  $u(t)$  można też przedstawić w postaci wykresu wektorowego, jak na rys. 4. Wektor napięcia  $\bar{U}_0$  wiruje z prędkością kątową  $\Omega_0$ , a pozostałe dwa wektory  $\frac{1}{2} m \bar{U}_0$  i  $-\frac{1}{2} m \bar{U}_0$  wirują z prędkościami kątowymi  $(\Omega_0 - \omega)$  i  $(\Omega_0 + \omega)$ .

Wartość mocy chwilowej wydzielonej w oporze  $R$  wyniesie

$$p(t) = \frac{u^2(t)}{R} \quad (7)$$

lub po podstawieniu wartości na  $u(t)$ , z zależności (5):

$$p(t) = \frac{1}{R} \cdot U_0^2 (1 + m \cdot \sin \omega t)^2 \cdot \sin^2 (\Omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{\tau}; \quad \Omega_0 = 2\pi \cdot F_0 = \frac{2\pi}{T}$$

gdzie:

$\tau$  — okres sygnału modulującego,

$T$  — okres fali nośnej napięcia,

przy czym

$$\omega \ll \Omega_0$$

Obliczmy moc średnią za okres  $T$

$$\begin{aligned} P_T &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_0^2}{R} \cdot (1 + m \cdot \sin \omega t)^2 \cdot \sin^2 (\Omega_0 t + \varphi_0) \cdot dt = \\ &= \frac{U_0^2}{R} \cdot (1 + m \cdot \sin \omega t)^2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 (\Omega_0 \cdot t + \varphi_0) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{U_0^2}{R} \cdot (1 + m \cdot \sin \omega t)^2 \end{aligned}$$

więc

$$P_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_0^2}{R} \cdot (1 + m \cdot \sin \omega t)^2 \quad (8)$$

Gdy nie ma sygnału modulującego, czyli gdy  $m = 0$ , to moc średnia fali nośnej wynosi

$$P_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_0^2}{R} \quad (9)$$

stąd

$$P_T = P_0 \cdot (1 + m \cdot \sin \omega t)^2 \quad (10)$$

Moc średnia za okres  $\tau$  przy modulacji wyniesie

$$P_m = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} P_T \cdot dt \quad (11)$$

$$P_m = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} P_0 \cdot (1 + m \cdot \sin \omega t)^2 \cdot dt = P_0 \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right)$$

$$P_m = P_0 + \frac{m^2}{2} \cdot P_0 \quad (12)$$

Moc średnia  $P_m$  ma więc dwie składowe, tj. moc fali nośnej  $P_0$  i moc wstęg bocznych  $P_0 \cdot \frac{m^2}{2}$ . Moc wstęg bocznych wzrasta z kwadratem głębokości modulacji, a przy  $m = 1$  (100% głębokości modulacji) wynosi połowę mocy fali nośnej.

### 3. PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI MODULACJI KĄTOWEJ

Według poprzedniej definicji modulacji kątovej zależność (2) można napisać w postaci

$$u(t) = U_0 \cdot \sin \Phi[s(t)] \quad (13)$$

gdzie:

$U_0$  — amplituda napięcia w.cz.,

$\Phi$  — kąt fazowy napięcia w.cz.

Kąt fazowy  $\Phi[s(t)]$  przedstawia funkcję zależną od sygnału modulującego  $s(t)$ .

#### 3.1. Modulacja częstotliwościowa

Przy częstotliwościowej modulacji fali nośnej zmiany częstotliwości są proporcjonalne do chwilowej wartości napięcia sygnału modulującego  $s(t)$ , a więc

$$\Omega(t) = f[s(t)] = \Omega_0 + k \cdot s(t), \quad (14)$$

gdzie  $k$  — współczynnik proporcjonalności,

a ponieważ  $\Omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}$

czyli

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_0^t \Omega(t) \cdot dt = \int_0^t f[s(t)] \cdot dt = \\ &= \Omega_0 t + k \cdot \int_0^t s(t) \cdot dt + \varphi_0 \end{aligned} \quad (15)$$

Jeżeli sygnał modulujący  $s(t)$  ma przebieg sinusoidalny, to:

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \Delta\Omega \cdot \cos \omega t \quad (16)$$

lub

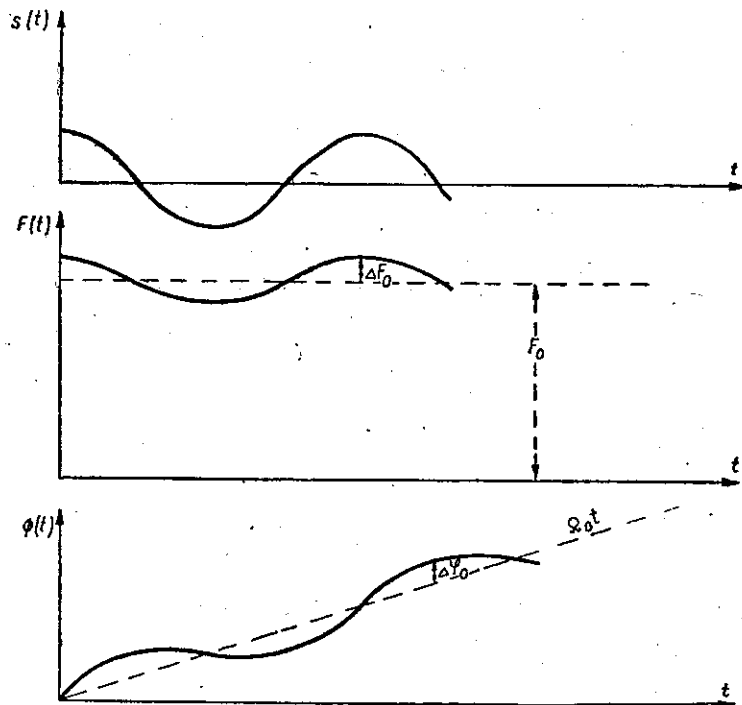
$$\Omega(t) = 2\pi \cdot F(t); \quad \Omega_0 = 2\pi \cdot F_0$$

i

$$F(t) = F_0 + \Delta F \cdot \cos \omega t \quad (17)$$

gdzie:

- $F_0$  — częstotliwość niemodulowanej fali nośnej,  
 $\Delta F$  — dewiacja częstotliwości.



Rys. 5. Przebiegi częstotliwości  $F(t)$  i fazy  $\Phi(t)$  w czasie  $t$  przy sinusoidalnym sygnale modulującym  $s(t)$  dla przypadku modulacji częstotliwościowej

Kąt fazowy  $\Phi(t)$  obliczamy na podstawie zależności (15) i (16)

$$\Phi(t) = \int_0^t (\Omega_0 + \Delta \Omega \cdot \cos \omega t) \cdot dt = \Omega_0 \cdot t + \frac{\Delta \Omega}{\omega} \cdot \sin \omega t \quad (18)$$

Oznaczając

$$\frac{\Delta \Omega}{\omega} = \frac{\Delta F}{f} = m_f \quad (19)$$

otrzymamy

$$\Phi(t) = \Omega_0 \cdot t + m_f \cdot \sin \omega t \quad (20)$$

Współczynnik  $m_f$ , zwany wskaźnikiem modulacji częstotliwościowej, jest proporcjonalny do dewiacji częstotliwości a odwrotnie proporcjonalny do częstotliwości sygnału modulującego.

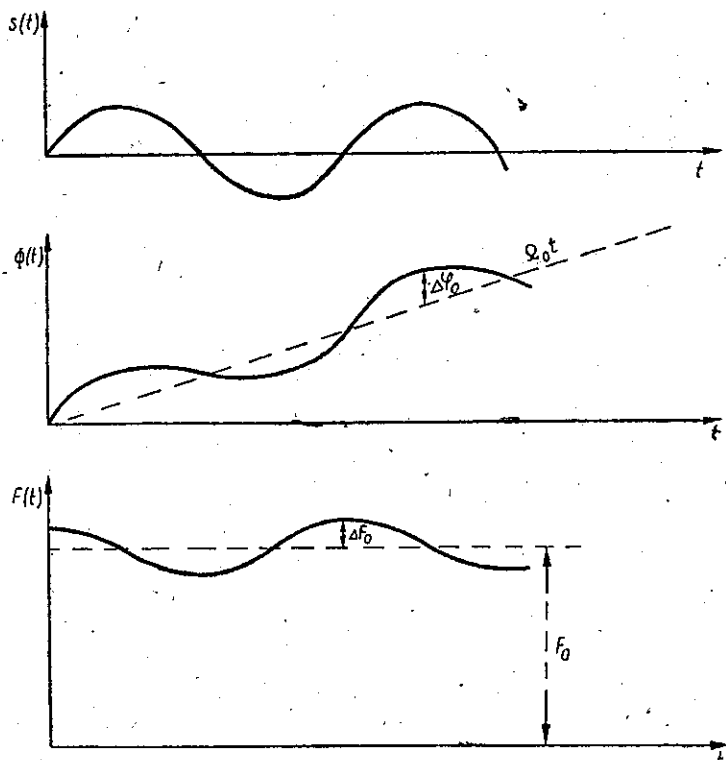
Na rysunku 5 są podane przebiegi częstotliwości fali nośnej  $F(t)$  i kąta fazowego  $\Phi(t)$  w czasie  $t$  przy sinusoidalnym sygnale modulującym  $s(t)$ .

### 3.2. Modulacja fazowa

Przy fazowej modulacji fali nośnej zmiany fazy drgań w.cz. są proporcjonalne do chwilowej wartości sygnału modulującego  $s(t)$ , czyli

$$\Phi(t) = f[s(t)] = \Omega_0 t + k' \cdot s(t) + \varphi_0 \quad (21)$$

gdzie  $k'$  — współczynnik proporcjonalności.



Rys. 6. Przebiegi fazy  $\Phi(t)$  i częstotliwości  $F(t)$  w czasie  $t$  przy sinusoidalnym sygnale modulującym  $s(t)$  dla przypadku modulacji fazowej

Jeżeli sygnał modulujący  $s(t)$  ma przebieg sinusoidalny, to można napisać

$$\Phi(t) = \Omega_0 \cdot t + \Delta\varphi \cdot \sin \omega t \quad (22)$$

gdzie  $\Delta\varphi$  — dewiacja fazy.

Oznaczając

$$\Delta \varphi = m_p$$

otrzymamy zależność analogiczną do zależności (20)

$$\Phi(t) = \Omega_0 \cdot t + m_p \cdot \sin \omega t \quad (23)$$

Ponieważ

$$\Omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

więc

$$\Omega(t) = \frac{d}{dt} (\Omega_0 \cdot t + \Delta \varphi \cdot \sin \omega t) = \Omega_0 + \omega \cdot \Delta \varphi \cdot \cos \omega t \quad (24)$$

oraz

$$F(t) = F_0 + f \cdot \Delta \varphi \cos \omega t \quad (25)$$

Na rysunku 6 są podane przebiegi kąta fazowego  $\Phi(t)$  i częstotliwości fali nośnej  $F(t)$  w czasie  $t$  przy sinusoidalnym sygnale modulującym  $s(t)$ .

#### 4. WSTĘGI BOCZNE PRZY MODULACJI CZĘSTOTLIWOSCIOWEJ W ZALEŻNOŚCI OD WSKAŹNIKÓW MODULACJI

Wstęgi boczne modulacji częstotliwościowej możemy określić wykorzystując ogólną zależność (2) i uwzględniając, że przy modulacji częstotliwościowej mamy  $U = U_0 = \text{const}$  oraz  $\Phi(t) = \Omega_0 \cdot t + m_f \cdot \sin \omega t$  stąd

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + m_f \cdot \sin \omega t) = \\ &= U_0 \cdot \sin \Omega_0 t \cdot \cos(m_f \cdot \sin \omega t) + U_0 \cdot \cos \Omega_0 t \cdot \sin(m_f \cdot \sin \omega t) \end{aligned} \quad (26)$$

Po rozwinięciu na szeregi wyrażień  $\cos(m_f \cdot \sin \omega t)$  i  $\sin(m_f \cdot \sin \omega t)$  otrzymamy:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 [I_0(m_f) \cdot \sin \Omega_0 t + 2 I_1(m_f) \cdot \cos \Omega_0 t \cdot \sin \omega t \\ &+ 2 \cdot I_2(m_f) \cdot \sin \Omega_0 t \cdot \cos 2 \omega t + 2 I_3(m_f) \cdot \cos \Omega_0 t \cdot \sin 3 \omega t \\ &\dots \\ &+ 2 \cdot I_n(m_f) \cdot \sin \Omega_0 t \cdot \cos n \omega t \dots] \end{aligned} \quad (27)$$

gdzie:  $I_0(m_f)$ ,  $I_1(m_f)$ ,  $I_2(m_f)$  ...  $I_n(m_f)$  — oznaczają funkcję Bessela pierwszego rodzaju i różnego rzędu.

Po przekształceniach trygonometrycznych otrzymamy

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \{ I_0(m_f) \cdot \sin \Omega_0 t + I_1(m_f) \cdot [\sin(\Omega_0 + \omega) t - \sin(\Omega_0 - \omega) t] \\ &+ I_2(m_f) \cdot [\sin(\Omega_0 + 2 \omega) t + \sin(\Omega_0 - 2 \omega) t] \\ &+ I_3(m_f) \cdot [\sin(\Omega_0 + 3 \omega) t - \sin(\Omega_0 - 3 \omega) t] \\ &\dots \\ &+ I_n(m_f) \cdot [\sin(\Omega_0 + n \omega) t + \sin(\Omega_0 - n \omega) t] \dots \} \end{aligned} \quad (28)$$

Jak widać, widmo to składa się z częstotliwości fali nośnej  $F_0$  oraz z nieskończenie wielu składowych bocznych o częstotliwościach  $(F_0 \pm \pm n \cdot f)$ . Wartości poszczególnych składowych są określone za pomocą funkcji Bessela.

Poza tym należy tu zaznaczyć, że przy zastąpieniu wskaźnika  $m_f$  wskaźnikiem  $m_p$  wzór (28) pozostaje słuszny również dla modulacji fazowej. Zależność (28) określa skład widma częstotliwościowego dla wskaźników modulacji o dowolnej wartości. Określamy obecnie wstęgi boczne przy modulacji wąskopasmowej, jaka występuje w modulatorach częstotliwości urządzeń radiotelefonicznych.

Rozważmy więc rozkład widma częstotliwościowego dla trzech przypadków:

- 1) gdy  $m_f \leq 0,2$ ,
- 2) gdy  $m_f \leq 0,5$ ,
- 3) gdy  $m_f \leq 1$ .

Oprzemy się przy tym na zależności

$$u(t) = U_0 \cdot [\sin \Omega_0 t \cdot \cos(m_f \cdot \sin \omega t) + \cos \Omega_0 t \cdot \sin(m_f \cdot \sin \omega t)]$$

Jeżeli  $m_f \leq 0,2$ , to

$$\cos(m_f \cdot \sin \omega t) = \cos(0,2 \cdot \sin \omega t) \cong 1$$

$$a \quad \sin(m_f \cdot \sin \omega t) = \sin(0,2 \cdot \sin \omega t) \cong 0,2 \cdot \sin \omega t$$

Dla zakresu więc  $0 \leq m_f \leq 0,2$  otrzymamy:

$$\cos(m_f \cdot \sin \omega t) \cong 1$$

$$\sin(m_f \cdot \sin \omega t) \cong m_f \cdot \sin \omega t.$$

Wstawiając do równania (26) otrzymamy

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \cdot \sin \Omega_0 t + U_0 \cdot m_f \cdot \sin \omega t \cdot \cos \Omega_0 t = \\ &= U_0 \cdot \sin \Omega_0 t + \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot m_f \cdot \sin(\Omega_0 + \omega)t - \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot m_f \cdot \sin(\Omega_0 - \omega)t \end{aligned} \quad (29)$$

Jak widać, przy wskaźniku modulacji  $m_f \leq 0,2$  występują dwie składowe boczne o amplitudach  $\frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot m_f$  i  $-\frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot m_f$  oraz o pulsacjach  $(\Omega_0 + \omega)$  i  $(\Omega_0 - \omega)$ .

Jeżeli  $m_f \leq 0,5$ , to

$$\sin(m_f \cdot \sin \omega t) \cong m_f \cdot \sin \omega t \quad (30)$$

$$\cos(m_f \cdot \sin \omega t) \cong 1 - \frac{m_f^2}{2} \cdot \sin^2 \omega t =$$

$$= 1 - \frac{m_f^2}{2} \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) = \left(1 - \frac{m_f^2}{4}\right) + \frac{m_f^2}{4} \cdot \cos 2\omega t \quad (31)$$

Na podstawie zależności (26), (30) i (31) otrzymamy

$$u(t) = U_0 \cdot \left[ \left( 1 - \frac{m_f^2}{4} \right) + \frac{m_f^2}{4} \cdot \cos 2\omega t \right] \cdot \sin \Omega_0 t + U_0 \cdot m_f \cdot \sin \omega t \cdot \cos \Omega_0 t \quad (32)$$

Przekształcając

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \cdot \left( 1 - \frac{m_f^2}{4} \right) \cdot \sin \Omega_0 t + U_0 \cdot \frac{m_f^2}{4} \cdot \cos 2\omega t \cdot \sin \Omega_0 t \\ &\quad + U_0 \cdot m_f \cdot \sin \omega t \cdot \cos \Omega_0 t = \\ &= U_0 \cdot \left( 1 - \frac{m_f^2}{4} \right) \cdot \sin \Omega_0 t + \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot m_f \cdot \sin (\Omega_0 + \omega) t - \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot m_f \cdot \sin (\Omega_0 - \omega) t \\ &\quad + U_0 \cdot \frac{m_f^2}{8} \cdot \sin (\Omega_0 + 2\omega) t + U_0 \cdot \frac{m_f^2}{8} \cdot \sin (\Omega_0 - 2\omega) t \end{aligned} \quad (33)$$

Jak widać z powyższej zależności, przy wskaźniku modulacji  $m_f \leq 0,5$  występują cztery składowe boczne, przy czym pierwsze dwie mają amplitudy  $\frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot m_f$  i  $-\frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot m_f$  oraz pulsacje  $(\Omega_0 + \omega)$  i  $(\Omega_0 - \omega)$ , a pozostałe mają amplitudy równe  $U_0 \cdot \frac{m_f^2}{8}$  oraz pulsacje równe  $(\Omega_0 + 2\omega)$  i  $(\Omega_0 - 2\omega)$ .

W przypadku gdy

$$m_f \leq 1$$

to po rozwinięciu na szeregi wyrażen  $\cos(m_f \cdot \sin \omega t)$  i  $\sin(m_f \cdot \sin \omega t)$  otrzymamy:

$$\cos(m_f \cdot \sin \omega t) \cong 1 - \frac{m_f^2}{2} \cdot \sin^2 \omega t$$

$$\sin(m_f \cdot \sin \omega t) \cong m_f \cdot \sin \omega t - \frac{m_f^3}{6} \cdot \sin^3 \omega t$$

Ponieważ

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t)$$

$$\sin^3 \omega t = \frac{1}{4} (-\sin 3\omega t + 3 \sin \omega t)$$

więc

$$\cos(m_f \cdot \sin \omega t) \cong \left( 1 - \frac{m_f^2}{4} \right) + \frac{m_f^2}{4} \cdot \cos 2\omega t; \quad (34)$$

$$\sin(m_f \cdot \sin \omega t) \cong \left( m_f - \frac{m_f^3}{8} \right) \cdot \sin \omega t + \frac{m_f^3}{24} \cdot \sin 3\omega t; \quad (35)$$

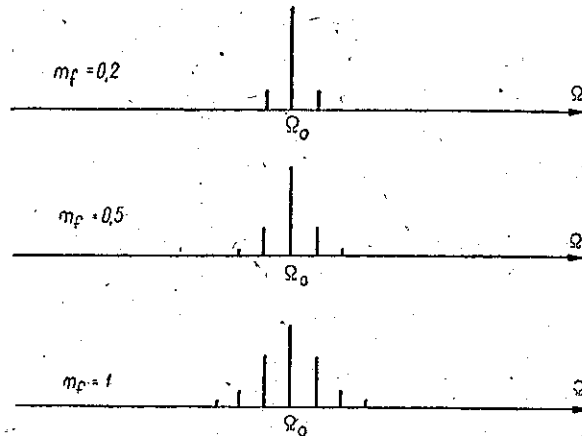


Na podstawie zależności (26), (34) i (35) otrzymamy:

$$u(t) = U_0 \cdot \left(1 - \frac{m_f^2}{4}\right) \cdot \sin \Omega_0 t + U_0 \cdot \frac{m_f^2}{4} \cdot \cos 2\omega t \cdot \sin \Omega_0 t \\ + U_0 \cdot \left(m_f - \frac{m_f^3}{8}\right) \cdot \sin \omega t \cdot \cos \Omega_0 t + \frac{m_f^3}{24} \cdot \sin 3\omega t \cdot \cos \Omega_0 t$$

Przy  $m_f = 1$  otrzymamy

$$u(t) = \frac{3}{4} U_0 \cdot \sin \Omega_0 t + \frac{7}{8} \cdot U_0 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \Omega_0 t + \frac{1}{4} \cdot U_0 \cdot \cos 2\omega t \cdot \sin \Omega_0 t \\ + \frac{1}{24} \cdot \sin 3\omega t \cdot \cos \Omega_0 t = \\ = \frac{3}{4} \cdot U_0 \cdot \sin \Omega_0 t + \frac{7}{16} \cdot U_0 [\sin(\Omega_0 + \omega) \cdot t - \sin(\Omega_0 - \omega) t] \\ + \frac{1}{8} \cdot U_0 \cdot [\sin(\Omega_0 + 2\omega) t + \sin(\Omega_0 - 2\omega) t] \\ + \frac{1}{48} \cdot U_0 \cdot [\sin(\Omega_0 + 3\omega) t - \sin(\Omega_0 - 3\omega) t] \quad (36)$$



Rys. 7. Widma częstotliwości przy trzech różnych wskaźnikach modulacji  $m_f$  i przy tej samej częstotliwości sygnału modulującego

Przy wskaźniku modulacji  $m_f = 1$  występują więc trzy pary składowych bocznych. Pierwsza para o amplitudach  $\frac{7}{16} \cdot U_0$  i  $-\frac{7}{16} \cdot U_0$  oraz pulsacjach  $(\Omega_0 + \omega)$  i  $(\Omega_0 - \omega)$ , druga para o amplitudach  $\frac{1}{8} U_0$  oraz pulsacjach  $(\Omega_0 + 2\omega)$  i  $(\Omega_0 - 2\omega)$ , a trzecia o amplitudach  $\frac{1}{48} \cdot U_0$  i  $-\frac{1}{48} \cdot U_0$  oraz pulsacjach  $(\Omega_0 + 3\omega)$  i  $(\Omega_0 - 3\omega)$ .

Jak widać z zależności matematycznych (29), (33) i (36) (przedstawionych na wykresach rys. 7), że wzrostem wskaźnika modulacji  $m_f$  ( $m_f > 0,2$ )

amplituda składowej napięcia o częstotliwości fali nośnej zaczyna maleć, a amplitudy pierwszej pary składowych wstęg bocznych wzrastają ze wzrostem wskaźnika  $m_f$ .

Przy dalszym wzroście wartości wskaźnika modulacji ( $0,2 < m_f < 1$ ) liczba składowych widma wzrasta, jednak amplitudy dalszych składowych są małe. Można więc przyjąć, że szerokość pasma częstotliwości zawierająca zasadniczą część energii sygnału zmodulowanego  $u(t)$  jest taka sama, jak przy modulacji amplitudy. Jeżeli wskaźnik modulacji  $m_f > 1$ , czyli gdy dewiacja częstotliwości jest większa od częstotliwości modulującej, to uzyskuje się już znacznie więcej par składowych widma.

Ta cecha modulacji częstotliwościowej odróżnia ją wyraźnie od modulacji amplitudowej, gdzie liczba par składowych wstęg bocznych jest zależna od liczby modulujących częstotliwości, a niezależna od amplitudy modulującego sygnału.

W urządzeniach modulacji częstotliwościowej, przy stałej modulującej częstotliwości, współczynnik modulacji jest proporcjonalny do amplitudy sygnału modulującego. Tym samym przy wzroście sygnału modulującego powstają nowe pary składowych wstęg bocznych widma częstotliwościowego, a pojawienie się dalszych par składowych wstęg bocznych zwiększa szerokość widma.

Ponieważ średnia moc zmodulowanej fali jest niezależna od amplitudy sygnału modulującego, to wzrost mocy wstęg bocznych musi się odbywać kosztem odpowiedniego zmniejszania się mocy fali nośnej.

## 5. WYTWARZANIE MODULACJI

Układy wytwarzające modulację sygnału w.cz. nazywamy modulatorami. Układy, w których sygnał modulujący wywołuje zmiany amplitudy sygnału w.cz., nazywamy modulatorami amplitudy, a układy, w których sygnał modulujący wywołuje zmiany częstotliwości lub fazy sygnału w.cz., nazywamy odpowiednio modulatorami częstotliwości lub fazy.

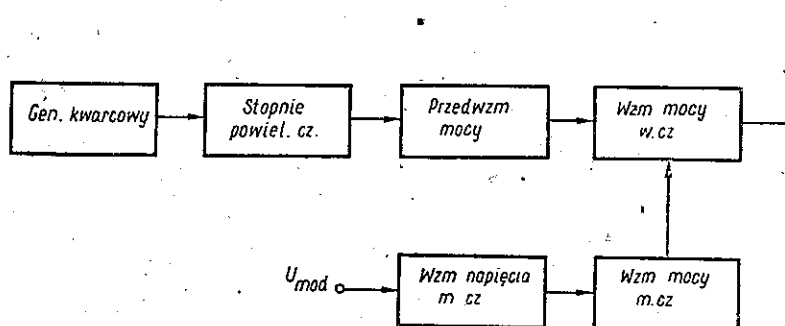
### 5.1. Modulatory amplitudy

W urządzeniach radiokomunikacji ruchomej są stosowane przeważnie układy modulatorów AM dwu rodzajów: z modulacją siatkową i z modulacją anodową. Układy z modulacją siatkową są stosowane przeważnie w urządzeniach nadawczych mniejszej mocy (np. radiotelefony przenośne), a układy z modulacją anodową — w urządzeniach nadawczych większej

mocy. Blokowy schemat nadajnika z modulatorem amplitudy jest podany na rys. 8.

Modulacja amplitudy jest w tym układzie wytwarzana w końcowym stopniu, tj. we wzmacniaczu mocy w.cz.

W urządzeniach wykorzystujących modulację amplitudy końcowy stopień mocy m. cz. pracuje zwykle w klasie A lub w klasie B w układzie przeciwsobnym.



Rys. 8. Układ nadajnika z modulacją amplitudową

W układach modulatorów AM są stosowane ograniczniki amplitudy w stopniach m.cz. oraz filtry ograniczające wielkie częstotliwości modulujące. W celu uzyskania modulacji amplitudowej praca lampy wzmacniacza w.cz. powinna odbywać się na nieliniowej charakterystyce.

#### 5.1.1. Układ modulacji siatkowej

Układ modulacji siatkowej jest przykładowo przedstawiony na rys. 9. W tym układzie źródło napięcia m.cz. jest poprzez transformator włączone w szereg ze źródłem napięcia polaryzującego pierwszą siatkę lampy wzmacniacza mocy w.cz.

Zmiany napięcia m.cz. wywołują zmiany polaryzacji siatki wzmacniacza w.cz., a w wyniku tego w obwodzie anodowym wzmacniacza w.cz. otrzymujemy zmiany amplitudy w.cz. W obwodzie siatkowym mamy sumę napięć, którą można napisać jako

$$u_s(t) = U_{s0} + U_{sa} \cdot \cos \Omega t + U_b \cdot \cos \omega t$$

gdzie:

$U_{s0}$  — napięcie polaryzacji siatki czynnej,

$U_{sa}$  — amplituda napięcia w.cz.,

$U_b$  — amplituda napięcia m.cz.,

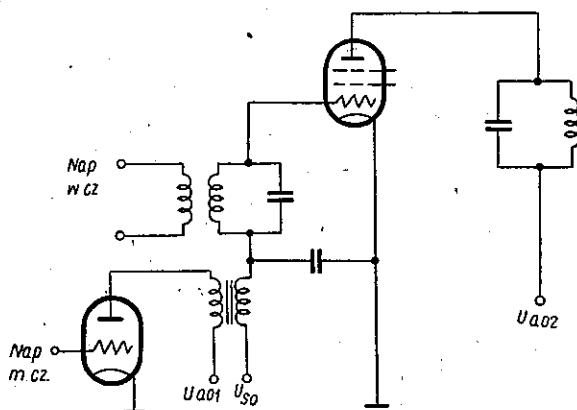
$\Omega = 2\pi F_1$ ,

$\omega = 2\pi f$ ,

przy czym:

$F$  — częstotliwość fali nośnej,

$f$  — częstotliwość sygnału modulującego.



Rys. 9. Układ modulacji siatkowej

Przy prawidłowej modulacji zmiany amplitudy napięcia w.cz. powinny być proporcjonalne do napięcia sygnału modulującego.

### 5.1.2. Układ modulacji anodowej

Układ modulacji anodowej jest przykładowo podany na rys. 10. W tym układzie sygnał m.cz. po wzmacnieniu jest doprowadzony za pośrednictwem transformatora do obwodu anodowego wzmacniacza mocy w.cz. Napięcie m.cz. jest włączone w szereg ze źródłem stałego napięcia anodowego  $U_{a02}$ . Stąd otrzymamy zależność

$$U_a(t) = U_{a02} + U_b \cdot \cos \omega t;$$

gdzie:

$U_a(t)$  — napięcie wypadkowe doprowadzone do anody lampy mocy w.cz.,

$U_{a02}$  — napięcie stałe, zasilające anodę lampy mocy w.cz.,

$U_b$  — amplituda napięcia m.cz.

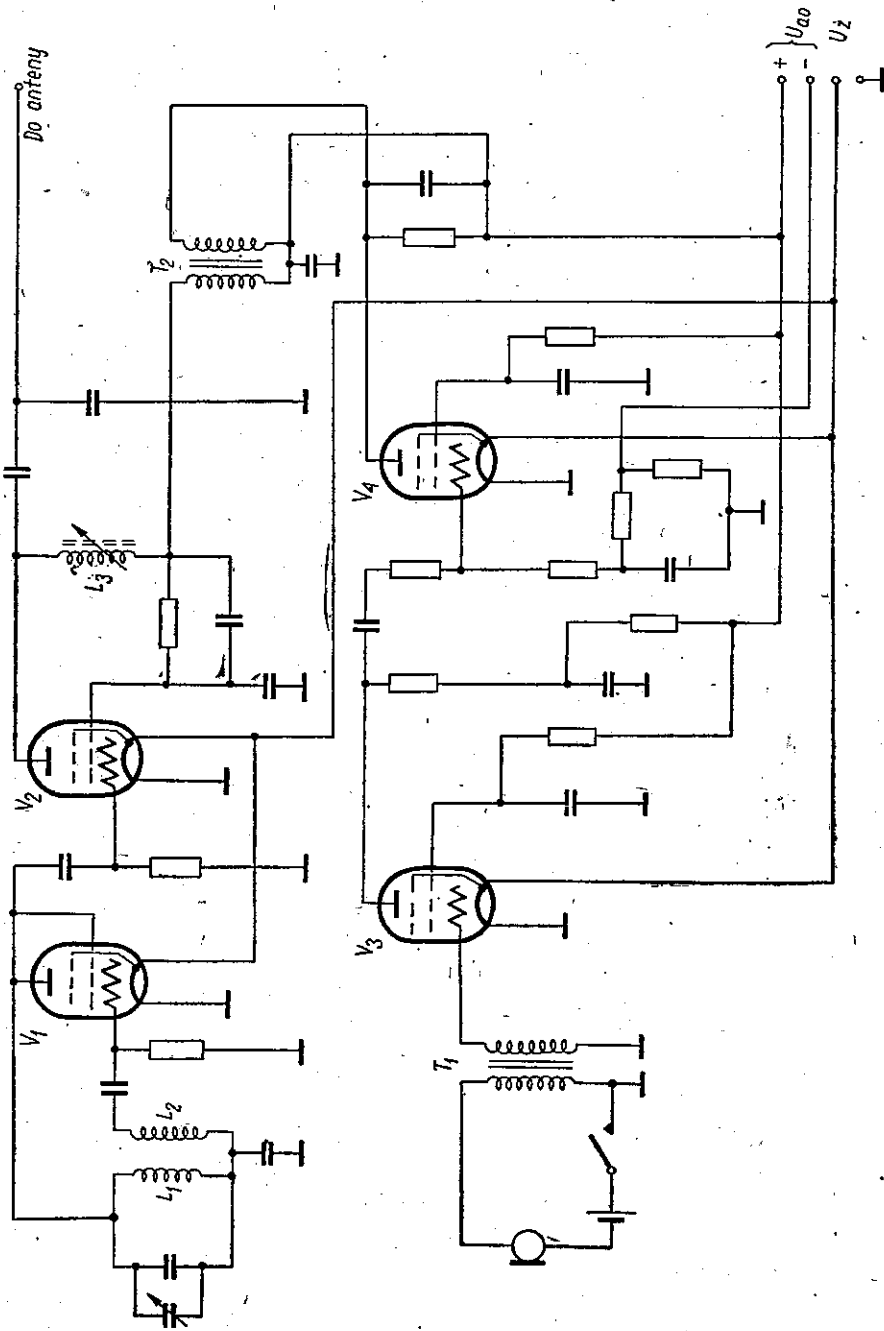
Zmiany napięcia m.cz. wywołując zmiany wzmacnienia napięcia wejściowego wzmacniacza w.cz. powodują modulację amplitudową.

Dla uzyskania większej głębokości modulacji trzeba zwiększać moc wzmacniacza m.cz. dostarczaną do wzmacniacza w.cz.

Przy 100% głębokości modulacji wzmacniacz m.cz. dostarcza moc równą połowie mocy fali nośnej.







Rys. 12. Schemat nadajnika AM radiotelefonu przenośnego z modulacją anodową

## 5.2. Modulatory częstotliwości

Układy modulatorów częstotliwości można podzielić na dwie grupy:

- 1) układy pośredniej modulacji częstotliwości,
- 2) układy bezpośredniej modulacji częstotliwości.

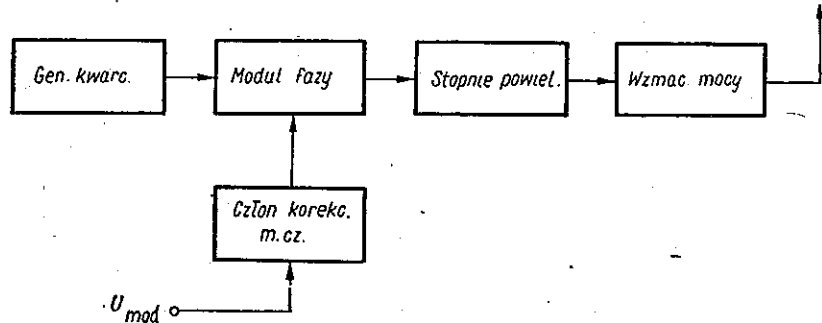
Zadaniem tych układów jest wytworzenie dewiacji częstotliwości proporcjonalnej do amplitudy sygnału modulującego.

W czasie pracy modulatora mogą powstawać niepożądane efekty: zwiększenie niestąłości częstotliwości generatora, modulacja amplitudowa oraz zniekształcenia sygnału modulującego.

Modulator powinien być tak zbudowany, aby te niepożądane efekty sprowadzić do wymaganego minimum. Charakterystyka modulacji powinna być liniowa, a zniekształcenia nieliniowe powinny znajdować się w granicach dopuszczalnych dla danego urządzenia (ok. 10%).

### 5.2.1. Układy pośredniej modulacji częstotliwości

Do takich układów zaliczamy układy wytwarzające modulację częstotliwości za pośrednictwem modulacji fazy. Zasada pracy urządzenia nadawczego z modulacją fazy jest podana na schemacie blokowym (rys. 13).



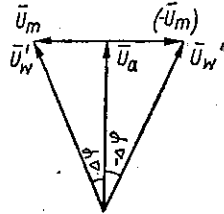
Rys. 13. Schemat blokowy urządzenia nadawczego z modulacją fazową

W tym układzie generator kwarcowy pracuje na stosunkowo małej częstotliwości; ułatwia to uzyskanie wystarczającej stałości częstotliwości. Modulator wytwarza modulację fazy. Przy zastosowaniu członu korekcyjnego m.cz. o odpowiedniej charakterystyce częstotliwościowej na wyjściu układu otrzymuje się sygnał o modulowanej częstotliwości. Następne stopnie są powielaczami częstotliwości, a stopień końcowy jest wzmacniaczem mocy w.cz. W układach pośredniej modulacji częstotliwości jest w ogólności potrzebna znaczna krotność (12—24) powielania do uzyskania odpowiedniej wartości dewiacji częstotliwości przy równoczesnym zachowaniu liniowej charakterystyki modulacji.



### 5.2.1.1. Układ modulacji fazowej z modulatorem zrównoważonym.

W tym układzie modulację fazy uzyskuje się przez sumowanie dwu napięć w.cz.  $u_a$  i  $u_b$  przesuniętych w fazie o  $90^\circ$  i przez zmianę amplitudy jednego napięcia, np.  $u_b$ .



Rys. 14. Wykres wektorowy napięć w.cz. modulatora fazy

Przy zmianie amplitudy jednego z napięć w.cz. w takt sygnału modulującego zmienia się faza napięcia wypadkowego. Wykres wektorowy sumowania napięć jest przedstawiony na rys. 14. Powstanie modulacji fazowej można wykazać następująco:

$$u_w(t) = u_a(t) + u_b(t)$$

$$u_a(t) = U_a \cdot \sin \Omega_0 t$$

$$u_b(t) = U_m(t) \cdot \sin \left( \Omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) = U_m(t) \cdot \cos \Omega_0 t$$

gdzie:

$u_a(t)$  — napięcie w.cz. niezmodulowane,

$u_b(t)$  — napięcie w.cz. przesunięte w fazie o kąt  $90^\circ$  względem napięcia  $u_a(t)$  i zmodulowane sygnałem m.cz.,

$$U_m(t) = U_{0m} \cdot \sin \omega t.$$

Pozostałe oznaczenia jak poprzednio.

Na podstawie tych zależności otrzymamy

$$u_w(t) = U_a \cdot \sin \Omega_0 t + U_m(t) \cdot \cos \Omega_0 t \quad (37)$$

Napięcie wypadkowe  $u_w(t)$  można następnie przedstawić w postaci

$$u_w(t) = \sqrt{U_a^2 + U_m^2(t)} \cdot \sin(\Omega_0 t + \varphi) \quad (38)$$

przy czym

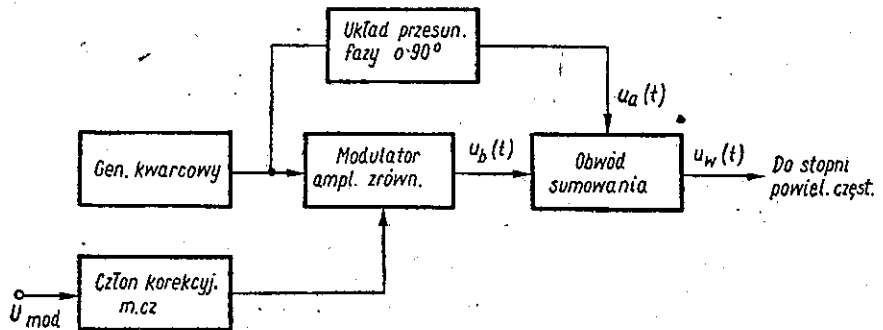
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_m(t)}{U_a} = \frac{U_{0m}}{U_a} \cdot \sin \omega t$$

czyli

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{U_m(t)}{U_a} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{U_{0m}}{U_a} \sin \omega t \right) \quad (39)$$

Jak widać z równania (39), aby zachować proporcjonalność między kątem  $\varphi$  i amplitudą  $U_{0m}$  sygnału modulującego, powinna być spełniona zależność  $U_{0m} \ll U_a$ .

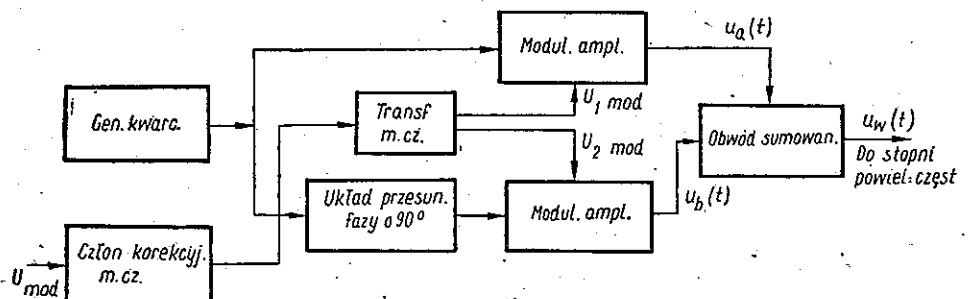
Na rysunku 15 jest przedstawiony układ modulacji fazy zrealizowany za pomocą zrównoważonego modulatora amplitudy. Z generatora kwarcowego sygnał w.cz. jest doprowadzony do układu przesunięcia fazy o  $90^\circ$  i do modulatora zrównoważonego. Oba napięcia wyjściowe są doprowadzone do obwodu sumowania. W obwodzie sumowania otrzymujemy wypadko-



Rys. 15. Układ modulacji fazowej zrealizowany za pomocą zrównoważonego modulatora amplitudy

we napięcie  $u_w(t)$  jako sumę napięć w.cz.  $u_a(t)$  i  $u_b(t)$ . Napięcie w.cz.  $u_b(t)$  jest równe zero wtedy, gdy napięcie modulujące  $u_{mod}$  jest również równe zero. Natomiast przy dodatnich i ujemnych wartościach napięcia modulującego otrzymujemy odpowiednio dodatnie lub ujemne przyrosty kąta  $\Delta\varphi$  lub  $-\Delta\varphi$ .

**5.2.1.2. Układ modulacji fazy z dwoma modulatorami amplitudy.** Schemat blokowy tego układu jest przedstawiony na rys. 16. Z generatora kwarcowego sygnał w.cz. jest doprowadzony bezpośrednio do jednego



Rys. 16. Układ modulacji fazowej z dwoma modulatorami amplitudy

z modulatorów amplitudy, a do drugiego modulatora poprzez układ przesuwający fazę napięcia o  $90^\circ$ . Napięcia wyjściowe  $u_a(t)$  i  $u_b(t)$  obu modulatorów są doprowadzone do obwodu sumowania.

W obwodzie sumowania otrzymujemy wypadkowe napięcie  $u_w(t)$ , którego faza zmienia się odpowiednio do zmian sygnału modulującego.

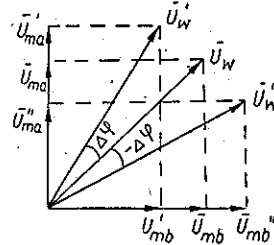
Wykres wektorowy tych napięć jest przedstawiony na rys. 17. Zależności zachodzące w układzie można przedstawić następująco:

$$u_a(t) = U_{1a} \cdot (1 + m \cdot \sin \omega t) \cdot \sin \Omega_0 t$$

$$u_b(t) = U_{1b} \cdot (1 - m \cdot \sin \omega t) \cdot \cos \Omega_0 t$$

$$u_w(t) = u_a(t) + u_b(t)$$

Rys. 17. Wykres wektorowy napięć w cz. modulatora fazy wg rys. 16



Oznaczmy:

$$U_{ma}(t) = U_{1a} \cdot (1 + m \cdot \sin \omega t)$$

$$U_{mb}(t) = U_{1b} \cdot (1 - m \cdot \sin \omega t)$$

więc

$$u_a(t) = U_{ma}(t) \cdot \sin \Omega_0 t$$

$$u_b(t) = U_{mb}(t) \cdot \cos \Omega_0 t$$

$$u_w(t) = U_{ma}(t) \cdot \sin \Omega_0 t + U_{mb}(t) \cdot \cos \Omega_0 t \quad (40)$$

$$u_w(t) = \sqrt{U_{ma}^2(t) + U_{mb}^2(t)} \cdot \sin(\Omega_0 t + \varphi)$$

przy czym

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{mb}(t)}{U_{ma}(t)}$$

a

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{U_{mb}(t)}{U_{ma}(t)} \quad (41)$$

Ponieważ napięcia modulujące  $U_{ma}(t)$  i  $U_{mb}(t)$  mają fazy odwrotne, napięcia więc  $u_a(t)$  i  $u_b(t)$  są modulowane amplitudowo w przeciwnych fazach.

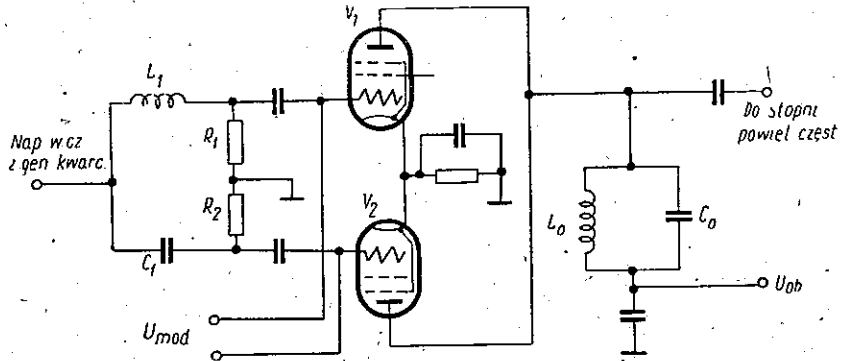
Suma tych napięć  $u_a(t)$  i  $u_b(t)$  daje napięcie wypadkowe  $u_w(t)$  o fazie  $\varphi$  zmieniającej się z dewiacją  $\pm \Delta\varphi$ .

Na rysunku 18 mamy podany schemat szczegółowy układu modulacji fazy z dwoma modulatorami amplitudy, w których zastosowano lampy  $V_1$  i  $V_2$ . Przesunięcie fazy o  $90^\circ$  napięć w.cz. doprowadzonych do pierwszych siatek lamp  $V_1$  i  $V_2$  uzyskujemy za pomocą przesuwника fazowego  $L_1, C_1, R_1, R_2$ .

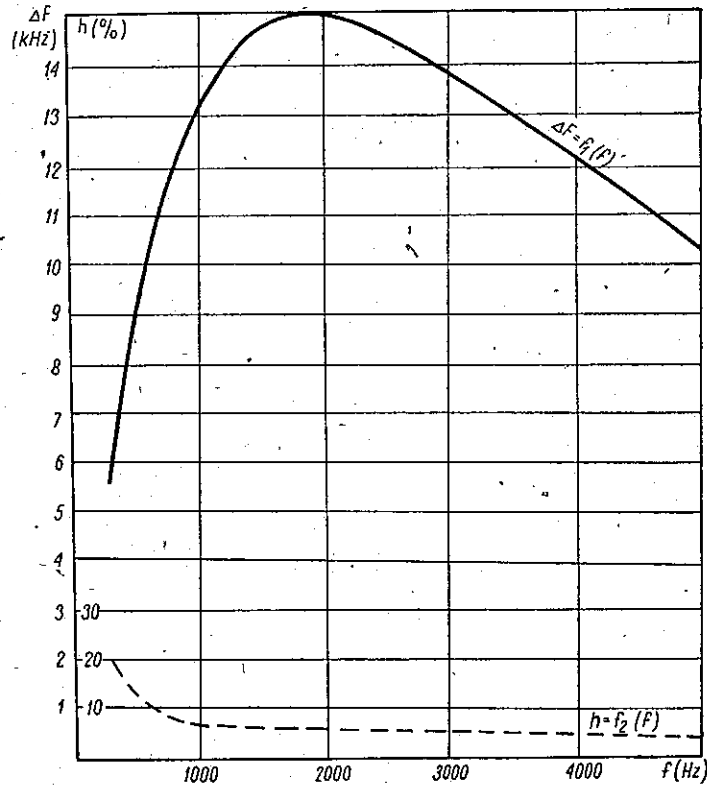
Napięcie modulujące  $U_{mod}$  zmieniając nachylenia charakterystyk lampy

$V_1$  i  $V_2$  wywołuje zmianę kąta fazowego napięcia wielkiej częstotliwości występującego w obwodzie anodowym lamp.

Charakterystyki modulacji oraz zniekształceń nieliniowych tego modulatora są przedstawione na rys. 19.

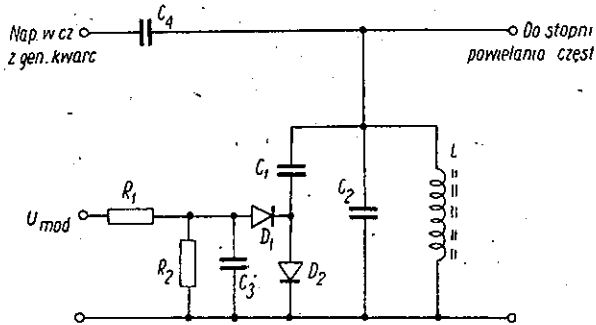


Rys. 18. Układ modulatora fazy, w którym lampy  $V_1$  i  $V_2$  pracują jako modulatory amplitudy

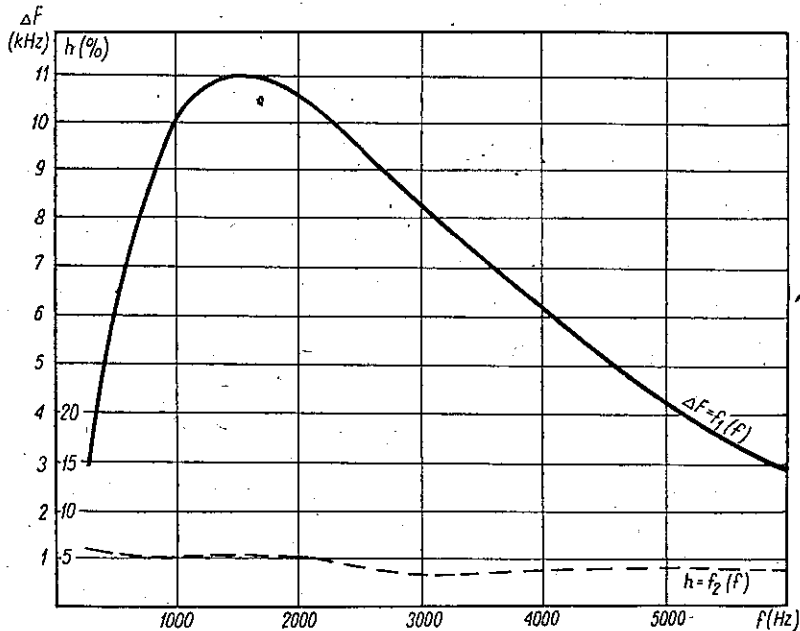


Rys. 19. Charakterystyki modulacji  $\Delta F(f)$  i zniekształceń nieliniowych  $h(f)$  modulatora wg rys. 18

**5.2.1.3. Układ diodowego modulatora fazy.** Na rys. 20 jest podany schemat diodowego modulatora fazy. Modulator składa się z obwodu  $L, C_2$ , kondensatora  $C_1$ , opornika  $R_2$  oraz z diod krystalicznych  $D_1$  i  $D_2$ . Napięcie w.cz. z generatora kwarcowego poprzez kondensator  $C_4$  jest doprowadzone do obwodu  $L, C_2$ . Prąd w.cz. przepływający przez diody  $D_1$  i  $D_2$  ładuje kondensatory  $C_1$  i  $C_3$ . Napięcie modulujące doprowadzone do diod  $D_1$  i  $D_2$  wpływa na zmianę stanu naładowania i wyładowania kondensatorów  $C_1$  i  $C_3$  i powoduje tym samym modulację fazową.

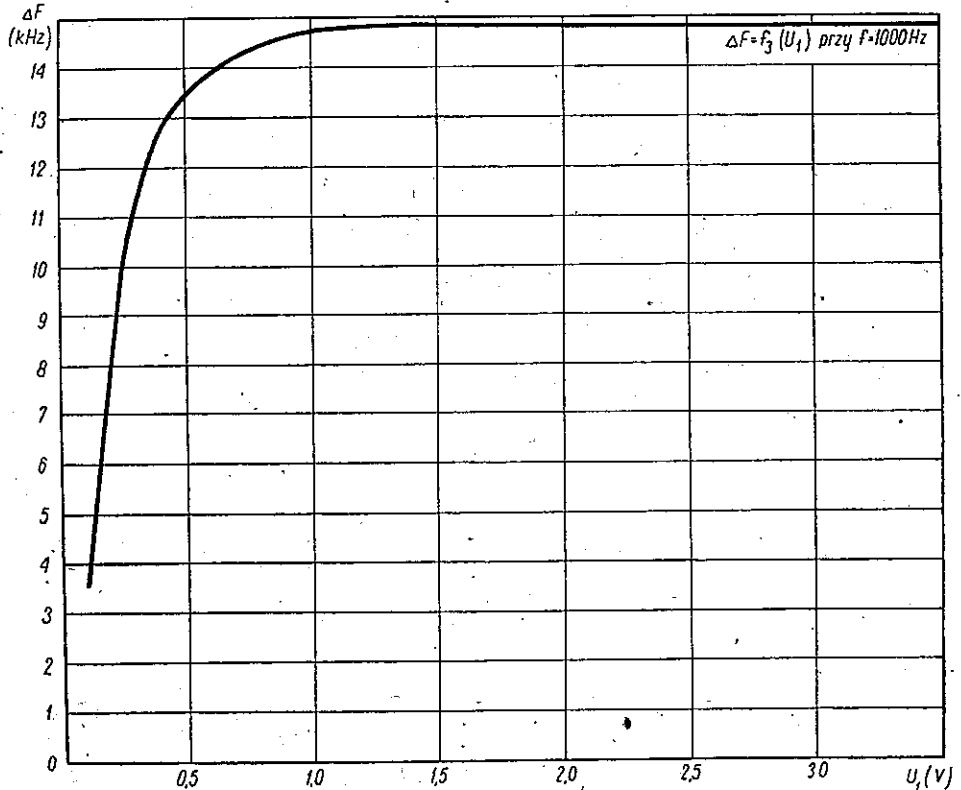


Rys. 20. Układ diodowego modulatora fazy



Rys. 21. Charakterystyki modulacji  $\Delta F = f_1(f)$  i zniekształceń nieliniowych  $h = f_2(f)$  układu modulatora wg rys. 20

Napięcie wyjściowe w.cz. z modulatora jest doprowadzone do stopnia powielania częstotliwości. Charakterystyki modulacji i zniekształceń nieliniowych są podane na rys. 21.

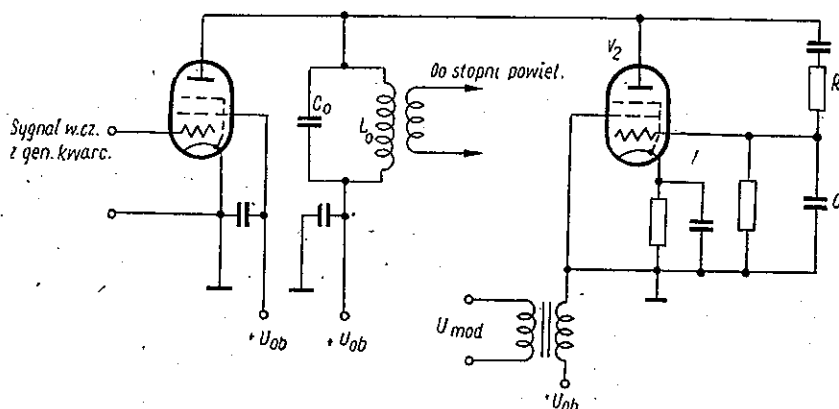


Rys. 22. Charakterystyka ograniczania dewiacji  $\Delta F = f_3(U_1)$  przy  $f_{mod} = 1000 \text{ Hz} = \text{const}$

Poza tym na rys. 22 mamy z kolei podaną charakterystykę ograniczania dewiacji modulacji, uzyskaną na podstawie pomiarów laboratoryjnych układu modulatora fazy i układu ograniczania dewiacji przy  $f_{mod} = 1000 \text{ Hz} = \text{const}$ .

**5.2.1.4. Układ modulatora z lampą reaktancyjną.** Na rys. 23 jest podany schemat modulatora fazy z lampą reaktancyjną. Drgania w. cz. są wytwarzane za pomocą generatora kwarcowego, nie zaznaczonego na rysunku.

Lampa  $V_1$  pracuje jako separator, natomiast lampa  $V_2$  pracuje jako lampa reaktancyjna z przesuwnikiem fazowym  $R, C$ . Przedstawia ona zmienną indukcyjność, która wywołuje modulację fazy w takt sygnału modulującego.



Rys. 23. Układ modulatora fazy z lampą reaktancyjną

**5.2.1.5. Nadajnik radiotelefoniczny z modulacją fazy.** Na rys. 24 jest podany szczegółowy schemat nadajnika z modulacją fazy, jako przykład tego rodzaju urządzeń stosowanych w radiokomunikacji ruchomej. Nadajnik jest stabilizowany kwarcem. Generator kwarcowy pracuje z lampą  $V_1$ . W urządzeniu tym zastosowano diodowy modulator fazy ( $D_1$  i  $D_2$ ). Następne stopnie z lampami  $V_2$ ,  $V_3$  i  $V_4$  są powielaczami częstotliwości. Stopień mocy nadajnika pracuje z lampą  $V_5$ .

Moc wyjściowa nadajnika wynosi ok. 20 W. Maksymalna dewiacja częstotliwości nie przekracza  $\pm 15$  kHz. Zniekształcenia nieliniowe wynoszą ok. 4 ÷ 8%. Charakterystyki modulacji i ograniczenia modulacji były podane przy opisie modulatorów fazy (rys. 21 i 22). Częstotliwość nadajnika wynosi 40 MHz.

### 5.2.2. Układy bezpośredniej modulacji częstotliwości

W układach bezpośredniej modulacji częstotliwości oddziaływujemy na parametry  $L$  lub  $C$  obwodu rezonansowego w. cz. (rys. 25).

Dla obwodu generatora w.cz. można napisać następujące zależności:

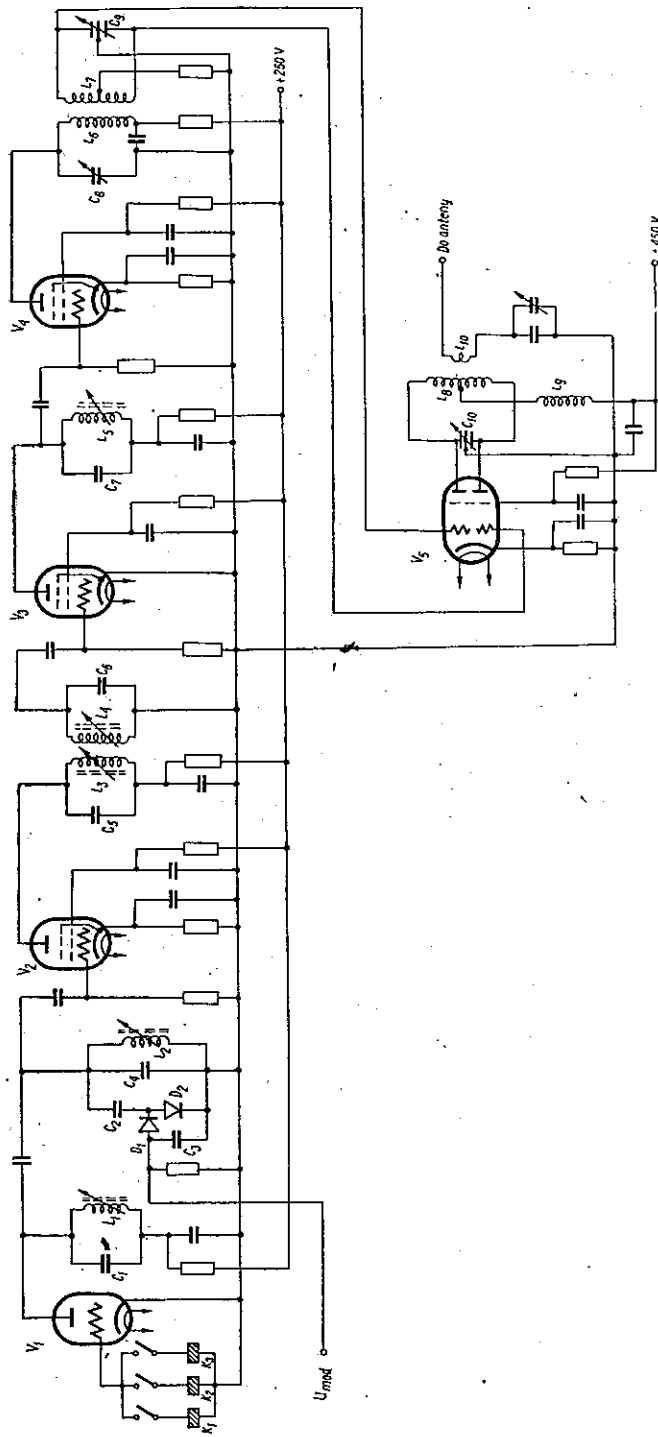
$$u = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(L \cdot i)}{dt} \quad (42)$$

$$i = \frac{dQ}{dt} = - \frac{d(Cu)}{dt} \quad (43)$$

gdzie:

$\psi$  — strumień magnetyczny cewki  $L$ ,

$Q$  — ładunek kondensatora  $C$ .



Rys. 24. Schemat nadajnika radiotelefonu przewoźnego z modulacją fazową



Rozważamy teraz dwa przypadki: gdy  $L$  jest zmienne w czasie  $t$  oraz gdy  $C$  jest zmienne w czasie  $t$ .

W przypadku gdy  $L$  zmienia się w czasie  $t$

$$i = -C \frac{du}{dt} = -C \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2}$$

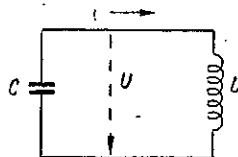
$$i = \frac{\psi}{L(t)} \quad (44)$$

więc

$$-C \cdot \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \frac{\psi}{L(t)}$$

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{\psi}{C \cdot L(t)} = 0 \quad (45)$$

Rys. 25. Obwód rezonansowy  $L, C$ .



Natomiast, gdy  $C$  zmienia się w czasie  $t$

$$u = -L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2}; \quad u = \frac{Q}{C(t)}$$

więc

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{L \cdot C(t)} = 0 \quad (46)$$

Obydwa równania różniczkowe (45) i (46) mają tę samą formę matematyczną

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \Omega^2 t \cdot X = 0 \quad (47)$$

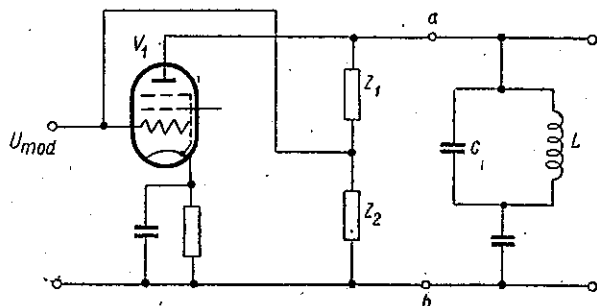
gdzie

$$\Omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} \quad (48)$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja  $X(t)$  przedstawiająca modulację częstotliwościową.

Z układów bezpośredniej modulacji częstotliwości najbardziej zasługuje na uwagę modulator częstotliwości z lampą reaktancyjną. Schemat takiego modulatora jest podany na rys. 26. Za pomocą przesuwника fazowego  $Z_1, Z_2$  uzyskuje się napięciowe sprzężenie zwrotne. Napięcie w.c.z., które w wyniku tego sprzężenia zwrotnego powstaje na pierwszej siatce lampy,

jest przesunięte o kąt fazowy  $90^\circ$  względem napięcia obwodu anodowego  $L, C$ .



Rys. 26. Układ modulatora częstotliwości z lampą reaktancyjną

Na rysunku 27 jest przedstawiony zastępczy schemat lampy reaktancyjnej o dużym oporze wewnętrznym. Dla prądu anodowego lampy można napisać

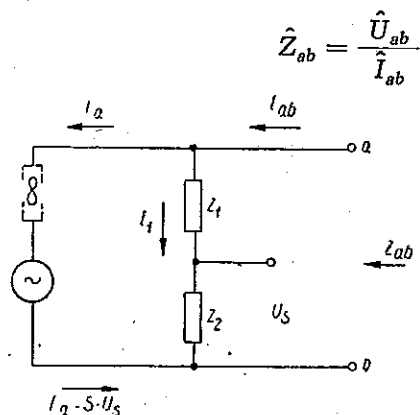
$$\hat{I}_a = S \cdot \hat{U}_s;$$

gdzie:

$S$  — nachylenie lampy,

$U_s$  — napięcie na siatce lampy,

a



Rys. 27. Układ zastępczy lampy reaktancyjnej

Jeżeli prąd  $I_1$ , płynący przez opory  $Z_1$  i  $Z_2$ , jest znacznie mniejszy od  $I_a$ , to

$$\hat{I}_{ab} \cong \hat{I}_a$$

więc

$$\hat{Z}_{ab} = \frac{\hat{U}_{ab}}{S \cdot \hat{U}_s}$$

a ponieważ

$$\hat{U}_s = \frac{\hat{U}_{ab}}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} \cdot \hat{Z}$$

więc

$$\hat{Z}_{ab} = \frac{\hat{U}_{ab}}{S \cdot \hat{U}_{ab} \cdot \hat{Z}_2} (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2) = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{S \cdot \hat{Z}_2}$$

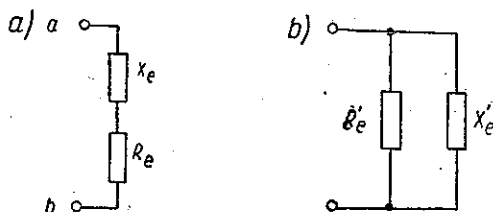
czyli

$$\hat{Z}_{ab} = \frac{1}{S} + \frac{1}{S} \cdot \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = R_e + j \cdot X_e \quad (50)$$

Składowa rzeczywista  $R_e$  i składowa reaktancyjna  $X_e$  odnoszą się do zastępczego układu szeregowego lampy reaktancyjnej (rys. 28a). Dla zastępczego układu równoległego lampy reaktancyjnej (rys. 28b) składową rzeczywistą  $R'_e$  i składową reaktancyjną  $X'_e$  obliczamy z zależności

$$\hat{Y}_{ab} = \frac{1}{\hat{Z}_{ab}} = \frac{S \cdot \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} = \frac{1}{R'_e} + \frac{1}{j \cdot X'_e}$$

Rys. 28. Układ zastępczy lampy reaktancyjnej: a) szeregowy, b) równoległy



W zależności od tego, jakie wartości mają  $Z_1$  i  $Z_2$ , otrzymujemy różny charakter pracy lampy reaktancyjnej. W jednym przypadku lampa reaktancyjna może pracować jako indukcyjność, a w innym jako pojemność.

Wartości  $R'_e$ ,  $X'_e$  dla różnych  $Z_1$  i  $Z_2$  są podane w tabl. 1.

Układy bezpośredniej modulacji częstotliwości z lampami reaktancyjnymi charakteryzują się małą stałością częstotliwości, natomiast w urządzeniach radiokomunikacji ruchomej wymagana jest bardzo duża stałość,

Tablica 1

$Z_1$	$\frac{1}{\Omega C}$	$R$	$R$	$\Omega L$
$Z_2$	$R$	$\frac{1}{\Omega C}$	$\Omega L$	$R$
$R'_e$	$\frac{1 + (R \Omega C)^2}{S \cdot (R \Omega C)^2}$	$\frac{1 + (R \Omega C)^2}{S}$	$\frac{R^2 + \Omega^2 L^2}{S \cdot \Omega^2 L^2}$	$\frac{R^2 + \Omega^2 L^2}{S \cdot R^2}$
$X'_e$	$C_e = \frac{SRC}{1 + (R \Omega C)^2}$	$L_e = \frac{1 + (R \Omega C)^2}{SR \Omega^2 C}$	$C_e = \frac{SRL}{R^2 + \Omega^2 L^2}$	$L_e = \frac{R^2 + \Omega^2 L^2}{SR \Omega^2 L}$

częstotliwości (ze względu na małe odstęp między kanałami 50 kHz lub ok. 25 kHz oraz dużą selektywność obwodów).

Z tego względu w urządzeniach radiokomunikacji ruchomej powszechnie są stosowane układy z modulacją fazy, zapewniające dużą stałość częstotliwości. Przy stosowaniu bezpośredniej modulacji częstotliwości z lampami reaktancyjnymi jest wymagane stosowanie układów automatycznej regulacji częstotliwości nośnej nadajnika.

## 6. WYMAGANIA TECHNICZNE CHARAKTERYZUJĄCE PRACĘ URZĄDZEŃ Z MODULACJĄ CZĘSTOTLIWOŚCIOWĄ

### 6.1. Wymagania techniczne wspólne dla nadajnika i odbiornika

#### 6.1.1. Zakresy częstotliwości przewidziane w kraju dla służb ruchomych

Przewidziano następujące zakresy częstotliwości:

- 33—35 MHz,
- 44—46 MHz,
- zakresy powyżej 100 do 174 MHz są ustalone przez Ministerstwo Łączności,
- 300—308 MHz,
- 336—344 MHz.

#### 6.1.2. Niestalość częstotliwości

Maksymalne odchylenia częstotliwości roboczej stacji od wartości nominalnej nie mogą przekraczać:

	dla mocy do 5 W	dla mocy powyżej 5 W
dla zakresów częst. 33—35 MHz i 44—46 MHz	$\pm 4$ kHz	$\pm 2$ kHz
dla zakresów częst. powyżej 100 do 174 MHz	$\pm 4,5$ kHz	$\pm 3$ kHz
dla zakresów częst. ok. 300 MHz		$\pm 3$ kHz

#### 6.1.3. Liczba kanałów

Liczba kanałów, w zależności od potrzeb użytkownika, najczęściej stosowana od 3—6 kanałów.

#### 6.1.4. Odstęp pomiędzy kanałami

Odstęp pomiędzy kanałami przy pracy simpleksowej powinien wynosić 50 kHz (w urządzeniach o zmniejszonej dewiacji spotyka się odstęp między kanałami 25—30 kHz).

### 6.1.5. Odstęp pomiędzy kanałami dla urządzeń dwupięsowych

Odstęp pomiędzy kanałami nadawania i odbioru dla urządzeń dwupięsowych wynosi 4,6 MHz.

### 6.1.6. Rodzaj modulacji

W urządzeniach radiotelefonicznych stosujemy modulację częsotliwości ( $F_3$ ).

### 6.1.7. Zakres częsotliwości modulujących

Zakres częsotliwości modulujących wynosi 300—3000 Hz.

### 6.1.8. Wartość maksymalnej dewiacji

Wartość maksymalnej dewiacji jest uzależniona od przyjętego odstępu pomiędzy kanałami oraz od niestałości częsotliwości i określa się ją na ok.  $\pm 12$  do  $\pm 15$  kHz (dla mniejszych odstępów między kanałami 25—30 kHz wartość maksymalnej dewiacji wynosi ok.  $\pm 5$  kHz).

### 6.1.9. Zniekształcenia nieliniowe

Zniekształcenia nieliniowe mierzone oddzielnie w odbiorniku i nadajniku nie powinny przekraczać 10% w całym zakresie częsotliwości modulujących od 300 do 3000 Hz.

### 6.1.10. Warunki pracy urządzenia

Zakres temperatur otoczenia:  $-20$  do  $+40^\circ\text{C}$  przy wilgotności względnej 45 do 90%.

Zmiany napięcia zasilającego:  $\pm 10\%$ .

## 6.2. Wymagania techniczne dla nadajnika

### 6.2.1. Moc wyjściowa nadajnika

- a) w zakresach częsotliwości 33—35 MHz i 44—46 MHz:
  - dla nadajnika przenośnego do około 1 W,
  - dla nadajnika przewoźnego do około 20 W,
  - dla nadajnika stacji stałej powyżej 20 W;
- b) w zakresach częsotliwości powyżej 100 MHz (do 174 MHz) wg wytycznych Ministerstwa Łączności;
- c) w zakresach częsotliwości ok. 300 MHz:
  - dla stacji przewoźnej do ok. 15 W,
  - dla stacji stałej do ok. 80 W.

### 6.2.2. Charakterystyka modulacji nadajnika

Wzrost charakterystyki modulacji począwszy od najniższej częstotliwości modulującej 300 Hz do częstotliwości szczytowej powinien wynosić 6 dB na oktawę częstotliwości (preemfaza) z tolerancją +1 dB i -3 dB w stosunku do wartości dewiacji przy częstotliwości 1000 Hz.

Ze względu na konieczność ograniczania pasma modulacji wartość dewiacji przy częstotliwości modulującej 6000 Hz nie powinna przekraczać ok.  $\frac{1}{5}$  wartości maksymalnej dewiacji.

## 6.3. Wymagania techniczne dla odbiornika

### 6.3.1. Czułość odbiornika

Czułość odbiornika powinna być lepsza od 2  $\mu$ V (SEM) przy zachowaniu stosunku sygnału do szumów i zniekształceń równym 20 dB.

### 6.3.2. Selektywność

Wartość tłumienia sygnału sąsiedniego kanału przy odstrojeniu  $\pm 50$  kHz powinna wynosić co najmniej 70 dB.

### 6.3.3. Zniekształcenia liniowe odbiornika (deemfaza)

Moc wyjściowa odbiornika powinna zmieniać się o 6 dB na oktawę częstotliwości modulujących w stosunku do mocy wyjściowej przy częstotliwości modulującej 1000 Hz, przy czym w granicach częstotliwości od 300 do 3000 Hz dopuszcza się rozbieżności nie przekraczające +1 dB i -3 dB. Poniżej 300 Hz moc wyjściowa odbiornika powinna maleć.

## 7. WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

W nadajnikach AM radiokomunikacji ruchomej najczęściej jest stosowana modulacja anodowa w stopniu wyjściowym. W modulatorach takich zniekształcenia nieliniowe nie przekraczają dziesięciu procent.

W nadajnikach FM najczęściej jest stosowana modulacja fazy łącznie z korektorami małej częstotliwości we wzmacniaczach sygnału modulującego. Taki typ układu modulatora jest stosunkowo prosty i pewny w pracy. Pozwala on na stabilizację częstotliwości podstawowej nadajnika za pomocą oscylatora kwarcowego. W układach modulacji fazy ze względu na konieczność uzyskania wymaganej dewiacji potrzebna jest odpowiednia krotność powielania, przy czym zwiększenie krotności powielania

zwiększa niebezpieczeństwo promieniowania częstotliwości niepożądanych. Natomiast w urządzeniach z modulacją amplitudy krotność powielania może być niewielka. Poza tym, w urządzeniach ruchomych, gdzie liczba lamp jest ograniczona do minimum (oszczędność źródeł zasilających) jest pożądana mała krotność powielania.

Modulacja amplitudowa jest stosowana w starszym systemie radiokomunikacyjnym, którego technika jest opracowana. Natomiast układy z modulacją częstotliwości są stale rozwijane i ulepszone.

Obecnie większość urządzeń radiokomunikacji ruchomej użytkowanych w kraju pracuje z pośrednią modulacją częstotliwości (tj. z modulacją fazy łącznie z korektorami m.cz. we wzmacniaczach sygnału modulującego) ze stabilizacją kwarcową.

Jeżeli chodzi o określenie kierunku rozwojowego układów modulacji w urządzeniach radiokomunikacji ruchomej, to należałoby wziąć pod uwagę dwa aspekty:

1. Tendencje do zawężenia pasma częstotliwościowego modulacji w celu uzyskania mniejszego odstepu pomiędzy kanałami przy jednoczesnym zwiększeniu stałości częstotliwości.

2. Tendencje do przesunięcia częstotliwości nośnych urządzeń radiokomunikacji ruchomej w kierunku górnego krańca zakresu UKF.

Obecnie część urządzeń zagranicznych, pracujących w zakresie częstotliwości ok. 150—180 MHz stosuje zwężone pasmo modulacji częstotliwości (dewiacja ok.  $\pm 5$  kHz) przy odstepie częstotliwości pomiędzy kanałami 25—30 kHz. W tych urządzeniach zastosowano pośrednią modulację częstotliwościową. Poza tym należałoby jeszcze wymienić układy z modulacją jednowstęgową. Takie układy mogą znaleźć szersze zastosowanie w urządzeniach radiokomunikacji ruchomej ze względu na możliwość znacznego zmniejszenia odstepu pomiędzy kanałami.

#### WYKAZ LITERATURY

1. Artym A. D.: Powyszenie efektywnosti rieaktywnych lamp. Radiotiekhnika, 1955, t. 10, nr 6, s. 67—77.
2. Artym A. D.: Teoria i metody czastotnoj modulacji. Moskwa-Leningrad 1961, s. 242.
3. Cartianu G. H.: Modulatia de frecventa. Bucarest 1958, s. 578.
4. Frühauf A.: Die Frequenz und Phasenmodulation. Nachrichtentechnik 2, 1952, nr 6, s. 165—167.
5. Gonorowskij I. S.: Czastotnaja modulacja i jeje primienienie. Swiazizdat, Moskwa 1948.
6. Gonorowskij I. S.: Czastotnoje modulatory s rieaktywnymi lampami. Radiotiekhnika 1947, nr 5, s. 3—18.

7. *Mansfeld W.*: Oscillatorschaltungen als Frequenzmodulatoren. Funk und Ton, 1951, t. 5, s. 50—55.
8. *Murray C. Crosby*: Band width and readability in frequency modulation. R. C. A. Review 1951, vol. 5, nr 3, s. 363—370.
9. *Nowakowski S. W., Samoń C. W.*: Technika czastotnoej modulacji w radio-wieszczanii. Gozenergoizdań 1952.
10. *Raschkowitsch A.*: Phasenwinkelmodulation. Leipzig 1952, s. 183.
11. *Talley D.*: A prognosis of Mobile Telephone Communications. I. R. E. Transactions on Vehicular Communications 1962, nr 1, s. 27—39.
12. *Walter J.*: Reaktanzröhre als Kapazität. Funk und Ton 1954, nr 12, s. 635—641.

B. Tor

### ЧАСТОТНАЯ МОДУЛЯЦИЯ И АМПЛИТУДНАЯ МОДУЛЯЦИЯ В АППАРАТУРЕ ПОДВИЖНОЙ РАДИОСВЯЗИ

#### Резюме

В настоящей работе описано два рода модуляции, а именно амплитудную и частотную модуляцию, с точки зрения использования их в аппаратуре подвижной радиосвязи. Описано и проанализировано распределение боковых полос частотного модулированного сигнала в зависимости от малых значений индекса модуляции.

Проанализирована работа амплитудных и частотных модуляторов с учетом современных технических требований к аппаратуре подвижной радиосвязи. При описании этих схем были использованы результаты также и собственных, проведенных автором в Институте связи, работ.

B. Tor

### FREQUENCY MODULATION AND AMPLITUDE MODULATION IN THE EQUIP- MENT OF MOBILE SERVICES

#### Summary

In this paper two kinds of modulation are treated, namely amplitude modulation and frequency modulation, applied to the equipment of mobile services.

The distribution of sidebandes of frequency modulation is presented in detail for small values of the modulation index. The functioning of amplitude and frequency modulators is analyzed, taking into account the technical requirements for equipment of mobile services.

In the description of these networks are also utilized the informations obtained from the research executed in the Institute of Telecommunications.



B. Tor

MODULATION DE FRÉQUENCE ET MODULATION D'AMPLITUDE DANS LES  
ÉQUIPEMENTS DE SERVICES MOBILES

Résumé

Dans cet article sont décrits deux genres de modulation, notamment la modulation d'amplitude et la modulation de fréquence en application aux équipements utilisés aux services mobiles.

La répartition des bandes latérales de modulation de fréquence est décrite et traitée en détail, pour des petites valeurs de l'indice de modulation.

Ensuite est analysé le fonctionnement de modulateurs d'amplitude et de fréquence en tenant compte des exigences techniques des équipements de services mobiles.

Dans la description de ces circuits on profite également des informations obtenues aux recherches faites à l'Institut des Télécommunications.

B. Tor

FREQUENZ- UND AMPLITUDENMODULATION BEI BEWEGLICHEN FUNK-  
EINRICHTUNGEN

Zusammenfassung

Der Aufsatz beschreibt die beiden Modulationsarten — die Amplituden- und die Frequenzmodulation — wie sie bei beweglichen Funkeinrichtungen Verwendung finden. Es wird die Seitenbandverteilung als Funktion kleiner Modulationsindexe beschrieben und untersucht.

Die Wirkungsweise von Amplituden- und von Frequenzmodulatoren wird analysiert, gegenwärtige technische Forderungen an bewegliche Funkeinrichtungen werden dabei berücksichtigt und Ergebnisse eigener, in dem Institut Łączności ausgeführter Untersuchungen ausgenutzt.



ZBIGNIEW DUDZIŃSKI

621.395.74 : 519.28

## MATEMATYCZNE ROZWIĄZANIE MODELU SIECI TELEKOMUNIKACYJNEJ ZA POMOCĄ ALGORYTMU SIMPLEKS

Rękopis dostarczony do Komitetu Redakcyjnego 6. 9. 1963 r.

Temat artykułu stanowi zagadnienie optymalnego projektowania sieci teletransmisyjnych przy użyciu metod programowania liniowego. Przedstawiono przebieg rachunku według algorytmu simpleks dla przykładu sieci między czterema punktami (centralami). W początkowych partiach artykułu scharakteryzowano ogólnie problematykę projektowania sieci linii telekomunikacyjnych w oparciu o daną sieć łączy z zaakcentowaniem aspektów ekonomicznych. Omówiono możliwości zastosowania programowania liniowego dla określenia optymalnego planu kierowania łączy w sieci linii.

W pierwszej fazie rozwiązania jako kryterium optymalności przyjęto warunek minimum kilometrołączy nowych linii. Przedstawiono wraz z całym prowadzącym do tego rachunkiem optymalny plan kierowania według tego kryterium. Pokazano, że pewna modyfikacja metody umożliwia określenie optymalnego rozwiązania według kryterium minimum kosztów budowy nowych linii. Wskazano na możliwość zastosowania elektronowych maszyn cyfrowych do rozwiązywania modeli sieci o większej ilości punktów.

### 1. WSTĘP

W wielu resortach gospodarczych, a więc i w resorcie łączności obserwuje się wzrost zainteresowań zastosowaniem nowoczesnych metod matematycznych i maszyn liczących. W tym zakresie pewnym dorobkiem może się wykazać Biuro Planów Perspektywicznych Łączności.

W artykule pt.: „Możliwości zastosowania metod matematycznych w ekonomice łączności” (Biuletyn Techniczny Ministerstwa Łączności, nr 2/1963) została na pewnym przykładzie zasygnalizowana możliwość zastosowania metod programowania liniowego do projektowania najekonomiczniejszego układu sieci linii teletransmisyjnych, czyli do określenia najekonomiczniejszego planu kierowania („rozpływu”) łączy w sieci linii teletransmisyjnych.

Ze względu na przeglądowy charakter wspomnianego artykułu podano w nim od razu gotowe rozwiązanie informując, że do tego celu stosuje się tzw. algorytm simpleks.

Celem niniejszego artykułu jest dokładniejsze przedstawienie rachunku związanego z zastosowaniem algorytmu simpleks do projektowania sieci linii teletransmisyjnych — na nieco bardziej rozbudowanym przykładzie.

## 2. PROBLEMATYKA ROZPŁYWU ŁĄCZY W SIECI LINII TELETRANSMISYJNYCH

Pod określeniem rozptywu łączy w praktyce projektowania sieci telekomunikacyjnych — a zwłaszcza perspektywicznego projektowania krajowych sieci teletransmisyjnych — rozumie się plan kierowania łączy w sieci linii, a więc określenie, jaką drogą teletransmisyjną (w jakich liniach) będzie przebiegać każde łącze.

Przed przystąpieniem do określenia rozptywu łączy należy mieć ustaloną sieć łączy, jakie należy zrealizować w projektowanej sieci linii. Jest to pierwszy etap projektowania sieci teletransmisyjnej. W drugim etapie opracowuje się rozptyw łączy, w wyniku czego uzyskuje się projekt sieci linii, obejmujący geometryczną konfigurację odcinków linii oraz obejmujący ilość łączy w każdym odcinku linii, czyli pojemność (przepustowość) linii.

Opracowanie rozptywu łączy przy dotychczas stosowanych metodach jest zadaniem złożonym i nader pracochłonnym, szczególnie wtedy, gdy występuje znaczna liczba relacji oraz odcinków linii. W trakcie opracowywania rozptywu łączy obserwuje się specyficzne współzależnienia przebiegów poszczególnych wiązek łączy związane z wzajemnym „wypychaniem” się łączy w związku z ograniczoną przepustowością niektórych odcinków sieci linii.

Zmiana przebiegu jednej wiązki łączy może spowodować konieczność zmian przebiegów całego szeregu innych wiązek łączy — czyli uogólniając — taka zmiana pociąga za sobą w sposób kaskadowy w zasadzie zmiany w całej sieci.

Kolejną trudnością przy opracowywaniu rozptywu łączy jest współzależność pomiędzy konfiguracją sieci linii a ilością łączy w każdym odcinku sieci.

Jakakolwiek zmiana w konfiguracji (wyeliminowanie lub uzupełnienie jakiegokolwiek odcinka sieci) wywołuje daleko idące zmiany w pojemności wszystkich innych odcinków sieci, a zadaniem rozptywu łączy jest jednoczesne określenie i konfiguracji sieci, i ilości łączy w każdym odcinku. W końcu należy mieć na względzie, że przy opracowywaniu rozptywu

łączy dąży się do uzyskania optymalnego najekonomiczniejszego projektu sieci linii teletransmisyjnych z uwzględnieniem wykorzystania linii istniejących, a jednocześnie uwzględnia się szereg wymagań eksploatacyjnych.

Wobec tak licznych trudności przy praktycznym opracowywaniu rozptywu łączy stosuje się szereg uproszczeń metodycznych.

Uproszczenia te polegają przede wszystkim na tym, że konfigurację sieci linii ustala się a priori — w pierwszym przybliżeniu w sposób niezależny od sieci łączy — a potem, w założonej konfiguracji przeprowadza się rozptyw łączy wprowadzając w trakcie rozptywu niezbędne korekty w założonej konfiguracji.

W obranej kolejności poszczególne wiązki łączy „upycha się” dążąc najpierw do wykorzystania linii istniejących oraz przy wyborze drogi teletransmisyjnej kierując się zasadą najkrótszej drogi oraz tzw. „wyczuciem inżynierskim”.

Tego rodzaju praktyka wykazuje istotne niedostatki.

Po pierwsze, konfiguracja sieci linii nie powinna być zakładana a priori, a powinna być wynikiem optymalnego rozptywu łączy.

Po drugie, należy opracowywać dużą liczbę projektów sieci, z których wszystkie zapewniałyby realizację tej samej sieci łączy i z tych wszystkich możliwych wariantów sieci wybrać jeden — optymalny.

Po trzecie, wynik rozptywu łączy obarczony jest subiektywizmem. Wynik ten zależy od tego, w jakiej kolejności brano łączy do rozptywu i w jakich liniach je najpierw układano.

Istnieje zatem potrzeba opracowania metody gwarantującej obiektywność i optymalność rozptywu łączy.

Potrzebę tej wychodzi naprzeciw rozwój ogólnych metod planowania gospodarczego, powstanie programowania liniowego jako działu ekonometrii oraz coraz szersze możliwości wykorzystania maszyn liczących.

### 3. ROZPTYW ŁĄCZY JAKO ZADANIE W UJĘCIU PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

W metodologii planowania gospodarczego obserwuje się obecnie tego rodzaju tendencję, że już nie wystarcza uzyskiwane dotychczas metodą bilansową zrównowazenie w planie potrzeb i możliwości; powstaje obecnie wymaganie, aby plan był nie tylko planem zbilansowanym, ale aby był planem optymalnym. Ujęcie takie stało się możliwe między innymi dzięki zastosowaniu metod programowania liniowego do zagadnień gospodarczych.

Przypomnijmy, że programowanie liniowe jest matematyczną metodą poszukiwania optymalnego wariantu (optymalnej decyzji) z punktu widzenia obranego kryterium w warunkach ograniczenia szeregiem zależności w charakterze liniowym.

W przebiegu badań z zakresu programowania liniowego rozróżnia się kilka etapów. Etap pierwszy polega na budowie modelu. Polega to na ścisłym sformułowaniu i wyrażeniu w języku matematycznym czynników i warunków ograniczających oraz na wyborze, sformułowaniu i przedstawieniu w postaci funkcji tego kryterium, które ma przesądzać o optymalności wariantu. Jest oczywiste, że tego rodzaju model jest tylko uproszczeniem, jakby fotografią rzeczywistości i nie odzwierciedla jej w sposób absolutnie wierny. Przy budowaniu modelu należy dbać tylko o to, by nie pominąć tych elementów rzeczywistości, które mogą mieć wpływ na wybór optymalnego programu.

Drugi etap badania polega na rozwiązaniu modelu. Teoria programowania liniowego dostarcza różnych algorytmów, to znaczy sposobów postępowania, pozwalających na uzyskanie rozwiązania w drodze przeprowadzenia odpowiednich rachunków.

Jednym z nich jest tzw. algorytm simpleks, za pomocą którego można rozwiązać każdy model liniowy posiadający rozwiązanie. Ostatnim etapem badania jest sprawdzenie realności i prawidłowości rozwiązania. Umożliwia to skontrolowanie, czy zbudowany model nie posiada jakichś istotnych braków.

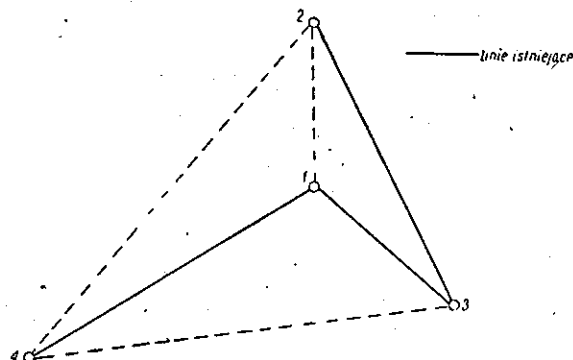
Tego rodzaju ujęcie programowania liniowego sugeruje możliwość zastosowania metod wypracowanych przez ten dział ekonometrii do rozwiązywania zagadnień rozpiętych łączy. Sugestie te wynikały również z tego, że przy rozwiązywaniu modeli programowania liniowego korzysta się z algebry macierzy, a jest naturalne, że dane dotyczące natężenia ruchu, ilości łączy, pojemności linii itp. układają się w postaci szachownicy.

Postęp w studiach nad tym zagadnieniem umożliwia zaprezentowanie na przykładzie niewielkiej sieci budowania i rozwiązywania modelu matematycznego w ujęciu programowania liniowego, a przez to określenie optymalnego rozpiętych łączy.

#### 4. WARUNKI PRZYKŁADU

Przedmiotem przykładu jest sieć czterech central w układzie jak na rys. 1. Dla warunków tego zadania jest w zasadzie obojętne, jakiego szczebla łączenia dotyczy ta sieć. Może to być sieć central miejscowych w układzie wielocentralowym lub sieć central międzymiastowych.

Odległości (w długości trasowej) między tymi centralami przedstawiono w tablicy A.



Rys. 1. Układ central będący przedmiotem przykładu

Między czterema punktami reprezentującymi poszczególne centrale istnieje 6 relacji. Na trzech z tych relacji istnieją w chwili przeprowadzania badania linie teletransmisyjne o określonej zdolności przepustowej, podanej w tabl. B, przy czym jako założenie przykładu przyjmuje się, że zdolności te nie mogą być powiększone.

Tablica A  
Odległości między centralami (w km)

Od centrali nr \ Do centrali nr	1	2	3	4
1	—	20	25	40
2		—	40	60
3			—	50
4				—

Na pozostałych trzech relacjach, tzn. pomiędzy punktami 1—2, 2—4 oraz 3—4, nie ma linii w chwili przeprowadzania badania (co odpowiada liczbie 0 w tablicy zdolności przepustowych). W tych trzech relacjach istnieje możliwość wybudowania linii w ramach rozbudowy sieci, przy czym zadaniem rozplanowania łączy jest określenie, które z tych linii należy wybudować i dla jakich liczb łączy.

Projektowana sieć linii ma zapewnić zrealizowanie określonej sieci łączy. Jest jasne, że dla tego rodzaju opracowania liczby potrzebnych łączy przyjmuje się według przewidywanego stanu potrzeb na przyszłość, np. za 5, 10, 20 lat. Liczby łączy przyjęte do rozplanowania podano w tabl. C.

W warunkach przykładu przyjęto, że każda wiązka łączy może być podzielona na dowolną ilość części i każda z tych części może być prowa-

Tablica B

**Zdolności przepustowe istniejących linii teletransmisyjnych (w liczbie łączy)**

Od Do	1	2	3	4
1	—	0	200	100
2		—	120	0
3			—	0
4				—

dzona inną drogą teletransmisyjną, przy czym ilość możliwych dróg wynika z ilości punktów sieci. Jak się o tym będzie można przekonać, w sieci o 4 punktach istnieje 5 możliwych dróg dla każdej relacji między dwoma punktami.

Tablica C

**Potrzebne łącza w poszczególnych relacjach**

Od Do	1	2	3	4
1	—	100	120	150
2		—	80	60
3			—	70
4				—

## 5. SFORMUŁOWANIE OGRANICZEŃ ILOŚCIOWYCH

Zastosowanie metod programowania liniowego do określania rozpiętych łączy zostało umożliwione dzięki trafnemu obraniu tzw. zmiennych decyzyjnych, tzn. tych wielkości, których wyznaczenie stanowi rozwiązanie zadania. Otóż jako zmienną decyzyjną przyjęto część wiązki łączy skierowaną jedną drogą teletransmisyjną, oznaczając ją przez

$$X_{k, a, b, \dots, l}$$

gdzie  $k, l$  są symbolami central, w których kończy się dana wiązka łączy,



natomiast  $a, b \dots$  są symbolami central, przez które przechodzi w zrozumieniu tranzytu teletransmisyjnego dana część wiązki.

Dla wyjaśnienia rozpatrzmy np. wiązkę łączy między punktami 1—2, która według tabl. C ma wynosić 100 łączy. Otóż ta wiązka łączy może być podzielona na 5 następujących części przebiegających różnymi drogami:

- $X_{12}$  — stanowi część wiązki w relacji 1—2 skierowanej bezpośrednio między punktem 1 a 2;
- $X_{132}$  — stanowi część wiązki w relacji 1—2 skierowanej tranzytem przez punkt 3;
- $X_{142}$  — stanowi część wiązki w relacji 1—2 skierowanej tranzytem przez punkt 4;
- $X_{1342}$  — stanowi część wiązki w relacji 1—2 skierowanej tranzytem przez dwa punkty 3 i 4 w ten sposób, że łąca wychodząc z punktu 1 przebiegają najpierw przez punkt 3, potem przez punkt 4 i kończą się w punkcie 2.
- $X_{1432}$  — stanowi część wiązki w relacji 1—2 skierowanej tranzytem przez dwa punkty 4 i 3 w ten sposób, że łąca wychodząc z punktu 1 przebiegają najpierw przez punkt 4, potem przez punkt 3 i kończą się w punkcie 2.

Jest oczywiste, że wszystkie pięć części (niezależnie od tego, że niektóre z nich mogą przybrać wartości zerowe, czyli nie wystąpić w ostatecznym rozwiązaniu) mają w sumie dać potrzebne 100 łączy, co zapisujemy następująco:

$$X_{12} + X_{132} + X_{142} + X_{1342} + X_{1432} = 100 \quad (1)$$

Postępując analogicznie, czyli dzieląc na różne drogi teletransmisyjne pozostałe wiązki łączy, otrzymuje się następujące zależności:

— dla wiązki łączy w relacji 1—3:

$$X_{13} + X_{123} + X_{143} + X_{1243} + X_{1423} = 200 \quad (2)$$

— dla wiązki łączy w relacji 1—4:

$$X_{14} + X_{124} + X_{134} + X_{1234} + X_{1324} = 150 \quad (3)$$

— dla wiązki łączy w relacji 2—3:

$$X_{23} + X_{213} + X_{243} + X_{2143} + X_{2413} = 80 \quad (4)$$

— dla wiązki łączy w relacji 2—4:

$$X_{24} + X_{214} + X_{234} + X_{2134} + X_{2314} = 60 \quad (5)$$

— dla wiązki łączy w relacji 3—4:

$$X_{34} + X_{314} + X_{324} + X_{3124} + X_{3214} = 70 \quad (6)$$

Po przyjrzeniu się wyliczonym wyżej zmiennym nie trudno spostrzec,

jaka jest mechanika uszeregowania indeksów, co umożliwi mechaniczne osymbolizowanie występujących zmiennych decyzyjnych.

Warto zauważyć, że w opracowywanym modelu występuje 30 zmiennych decyzyjnych, skoro dla każdej z 6 relacji występuje 5 możliwych dróg teletransmisyjnych.

Z kolei należy określić, w jakich liniach teletransmisyjnych wystąpią poszczególne części wiązki. Tak np. część wiązki określona symbolem  $X_{1342}$  przebiega w linii 1—2, w linii 3—4 i w linii 2—4; a np. część wiązki określona symbolem  $X_{143}$  wystąpi w linii 1—4 oraz w linii 3—4. Dla porównania ze zdolnościami przepustowymi linii konieczne jest wyznaczenie sumy wszystkich łączy pochodzących z dowolnych relacji występujących w określonej linii.

Tak np. w linii 1—2 wystąpią następujące części wiązek, a ich suma wynosi:

$$X_{12} + X_{123} + X_{1243} + X_{124} + X_{1234} + X_{213} + X_{2143} + X_{214} + X_{2134} + X_{3124} + X_{3214}$$

Przy dobieraniu tych zmiennych, które wystąpią w określonej linii, pomocne jest spostrzeżenie, że spośród 30 części wiązek, np. w linii 1—2, przebiegają te łączy, w osymbolizowaniu których wystąpiły obok siebie (w dowolnej kolejności) indeksy 1 i 2.

Suma łączy, które wystąpią w linii 1—3, wynosi (przy czym ponieważ linia 1—3 jest linią istniejącą o zdolności przepustowej 200 łączy, więc warunek nieprzekroczenia tej zdolności wyrażono od razu w postaci nierówności):

$$X_{132} + X_{1342} + X_{13} + X_{134} + X_{1324} + X_{213} + X_{2413} + X_{2134} + X_{2314} + X_{314} + X_{3124} \leq 200 \quad (7)$$

Analogicznie dla łączy w linii 1—4:

$$X_{142} + X_{1432} + X_{143} + X_{1423} + X_{14} + X_{2143} + X_{2413} + X_{214} + X_{2314} + X_{314} + X_{3214} \leq 100 \quad (8)$$

oraz dla łączy w linii 2—3:

$$X_{132} + X_{1432} + X_{123} + X_{1423} + X_{1234} + X_{1324} + X_{23} + X_{234} + X_{2314} + X_{324} + X_{3214} \leq 120 \quad (9)$$

W linii 2—4 wystąpią następujące łączy:

$$X_{142} + X_{1342} + X_{1243} + X_{1423} + X_{124} + X_{1324} + X_{243} + X_{2413} + X_{24} + X_{324} + X_{3124}$$

a w linii 3—4:

$$X_{1342} + X_{1432} + X_{143} + X_{1243} + X_{134} + X_{1234} + X_{243} + X_{2143} + X_{234} + X_{2134} + X_{34}$$

## 6. SFORMUŁOWANIE FUNKCJI-KRYTERIUM

Nie trudno stwierdzić, że w ramach dotychczas ustalonych 9 zależności od (1) do (9) istnieje wiele rozwiązań, tzn. takich zbiorów zmiennych decyzyjnych, które jednocześnie spełniają te 9 zależności. Każde takie rozwiązanie jest rozwiązaniem dopuszczalnym, tzn. uzyskany w ten sposób rozptyw łączy zapewnia zrealizowanie wszystkich potrzebnych łączy przy nieprzekroczonych zdolnościach przepustowych istniejących linii teletransmisyjnych.

Jednakże zadanie polega na wybraniu spośród wszystkich możliwych rozptywów — rozptywu optymalnego. W związku z tym zachodzi potrzeba określenia kryterium wyboru. Problem kryterium wyboru dla sieci telekomunikacyjnej jest szerokim zagadnieniem i możliwe są różne sposoby podejścia do tego tematu. W badanym przykładzie, wychodząc z założenia istnienia niektórych linii w rozpatrywanej sieci, powiązано kryterium wyboru z ekonomicznością wyłącznie nowych linii. Jednakże nawet pojęcie ekonomiczności nowych linii może być różnie traktowane.

Na przykład można by się kusić o uwzględnienie w tym kryterium zarówno nakładów inwestycyjnych, jak i kosztów eksploatacji, zgodnie z zasadami analizy efektywności inwestycji. Pewnym uproszczeniem jest ograniczenie rozważań wyłącznie do kosztów inwestycji. Koszty budowy linii teletransmisyjnych są funkcją wielu czynników, przede wszystkim długości linii i liczby łączy — i to inną funkcją dla każdego systemu teletransmisyjnego.

Nie ulega wątpliwości, że w dalszych pracach nad zastosowaniem metod programowania liniowego do określenia rozptywu łączy będzie należało uwzględniać koszt linii w zależności od liczby łączy i długości linii. W niniejszym przykładzie przyjęto roboczo założenie upraszczające polegające na tym, że koszt budowy linii jest wprost proporcjonalny do iloczynu długości i ilości łączy. W ten sposób kryterium ekonomiczności sprowadza się do kryterium minimum kilometrołączy nowych linii. Obra-  
ne kryterium jest przybliżonym odzwierciedleniem zależności charakterystycznych dla systemów naturalnych i dla sieci miejscowych. Kryterium minimum kilometrołączy nie jest dostatecznie prawidłowe dla systemów wielokrotnych, jednak są podstawy do sądzenia, że uda się w metodzie programowania liniowego uwzględnić również inne kryteria bardziej odpowiadające nowoczesnym systemom teletransmisyjnym.

W rozpatrywanym przykładzie występują 3 linie, które mogłyby być wybudowane w ramach projektu rozbudowy: linia 1—2 o długości 20 km, linia 2—4 o długości 60 km oraz linia 3—4 o długości 50 km.

Liczby łączy w nich występujące zostały wyliczone powyżej. Wobec tego suma kilometrołączy nowych linii wynosi:

$$\begin{aligned}
K = & 20 [X_{12} + X_{123} + X_{1243} + X_{124} + X_{1234} + X_{213} + X_{2143} + X_{214} + X_{2134} + \\
& + X_{3124} + X_{3214}] + 60 [X_{142} + X_{1342} + X_{1243} + X_{1423} + X_{124} + X_{1324} + X_{243} + \\
& + X_{2413} + X_{24} + X_{324} + X_{3124}] + 50 [X_{1342} + X_{1432} + X_{143} + X_{1243} + X_{134} + \\
& + X_{1234} + X_{243} + X_{2143} + X_{234} + X_{2134} + X_{34}] \quad (10)
\end{aligned}$$

W ten sposób zostało zakończone budowanie modelu matematycznego dla badanego przykładu rozplywu łączy. Model ten składa się z 9 zależności ograniczających oraz z funkcji kryterium (10), która dla optymalnego rozwiązania ma osiągać minimum. Dla porządku należy również postawić warunek, że wszystkie zmienne decyzyjne mogą przybierać wartości tylko nieujemne.

Jest rzeczą oczywistą, że gdyby warunki zadania zostały inaczej sformułowane, uzyskano by inne zależności, a więc inny model. Tak np. gdyby istniało ze względów eksploatacyjnych ograniczenie podziału wiązki łączy na części kierowane różnymi drogami teletransmisyjnymi, lub gdyby istniały narzucone wymagania co do proporcji pomiędzy poszczególnymi częściami wiązki, lub gdyby ograniczono liczbę punktów tranzytu, uzyskano by inny model matematyczny. Również obrane kryterium, jak to już wskazywano, ma charakter roboczy.

Natomiast istotnym wnioskiem z dotychczasowych rozważań jest to, że tego rodzaju zależności w sieci telekomunikacyjnej według założonych warunków dają się wyrazić ściśle w języku matematycznym.

## 7. ROZWIĄZANIE MODELU ZA POMOCĄ ALGORYTMU SIMPLEKS

Przebieg rozwiązania modelu zostanie przedstawiony tylko w postaci poszczególnych operacji obliczeniowych — z pominięciem teoretycznego uzasadnienia algorytmu simpleks, co można znaleźć w literaturze tego tematu.

Idea algorytmu simpleks polega na tym, że za punkt wyjścia przyjmuje się pewne rozwiązanie modelu, o którym tylko tyle wiemy, że jest dopuszczalne, to znaczy spełnia warunki (1) do (9). Następnie w kolejnych etapach rozwiązanie to poprawiamy, aż po pewnej skończonej ilości etapów otrzymujemy rozwiązanie optymalne.

W algorytmie simpleks jako rozwiązanie początkowe z reguły przyjmujemy takie rozwiązanie, któremu odpowiadają wartości zerowe wszystkich zmiennych decyzyjnych.

Aby rozwiązanie zerowe było dopuszczalne w świetle warunków (1) do (6), należy równania te uzupełnić tzw. zmiennymi sztucznymi  $S_1$  do  $S_6$ , otrzymując:

$$X_{12} + X_{132} + X_{142} + X_{1342} + X_{1432} + S_1 = 100 \quad (11)$$

$$X_{13} + X_{123} + X_{143} + X_{1243} + X_{1423} + S_2 = 120 \quad (12)$$

$$X_{14} + X_{124} + X_{134} + X_{1234} + X_{1324} + S_3 = 150 \quad (13)$$

$$X_{23} + X_{213} + X_{243} + X_{2143} + X_{2413} + S_4 = 80 \quad (14)$$

$$X_{24} + X_{214} + X_{234} + X_{2134} + X_{2314} + S_5 = 60 \quad (15)$$

$$X_{34} + X_{314} + X_{324} + X_{3124} + X_{3214} + S_6 = 70 \quad (16)$$

Dzięki tej postaci wszystkie zmienne decyzyjne mogą przybrać wartości zerowe. Dla badanego przykładu zmienne sztuczne  $S_1$  do  $S_6$  stanowią tę liczbę łączy w poszczególnych relacjach, która nie została jeszcze wprowadzona do rozplywu. Oczywiście, należy zapewnić, aby zmienne sztuczne nie znalazły się w ostatecznym rozwiązaniu, tzn. aby wszystkie potrzebne łąca zostały uwzględnione w rozplywie.

Z kolei dla potrzeb algorytmu simpleks należy przekształcić nierówności (7) do (9) na równania, wprowadzając tzw. zmienne swobodne:

$$X_{132} + X_{1342} + X_{13} + X_{134} + X_{1324} + X_{213} + X_{2413} + X_{2134} + X_{2314} + X_{314} + X_{3124} + S_7 = 200 \quad (17)$$

$$X_{142} + X_{1432} + X_{143} + X_{1423} + X_{14} + X_{2143} + X_{2413} + X_{214} + X_{2314} + X_{314} + X_{3214} + S_8 = 100 \quad (18)$$

$$X_{132} + X_{1432} + X_{123} + X_{1423} + X_{1234} + X_{1324} + X_{23} + X_{234} + X_{2314} + X_{324} + X_{3214} + S_9 = 120 \quad (19)$$

Zmienne swobodne  $S_7$  do  $S_9$  stanowią nie wykorzystaną zdolność przepustową poszczególnych istniejących linii teletransmisyjnych.

Aby zapewnić, by zmienne sztuczne  $S_1$  do  $S_6$  nie wystąpiły w rozwiązaniu ostatecznym, wprowadza się je do funkcji-kryterium, która podlega minimalizacji, mnożąc przez nieskończenie wielki współczynnik  $M$ . Po przekształceniach uzyskuje się następującą postać funkcji-kryterium:

$$K = 20 X_{12} + 60 X_{142} + 110 X_{1324} + 50 X_{1432} + 20 X_{123} + 50 X_{143} + 130 X_{1243} + 60 X_{1423} + 80 X_{124} + 50 X_{134} + 70 X_{1234} + 60 X_{1324} + 20 X_{213} + 110 X_{243} + 70 X_{2143} + 60 X_{2413} + 60 X_{24} + 20 X_{214} + 50 X_{234} + 70 X_{2134} + 50 X_{34} + 60 X_{324} + 80 X_{3124} + 20 X_{3214} + M S_1 + M S_2 + M S_3 + M S_4 + M S_5 + M S_6 \quad (20)$$

Przystępuje się następnie do konstrukcji „Tablicy simpleks” (tabl. 1) obrazującej rozwiązanie początkowe, w którym wszystkie zmienne decyzyjne mają wartości zerowe, a zmienne sztuczne i swobodne przybierają wartości, jakie figurują po prawej stronie równań (11) do (19).

Liczba kolumn tablicy simpleks odpowiada liczbie wszystkich zmiennych, a liczba wierszy — liczbie zmiennych sztucznych i swobodnych — czyli jak w naszym przykładzie, liczbie zależności ograniczających.

Na lewym marginesie tablicy są podane zmienne występujące w danym etapie rozwiązania, a na prawym marginesie — wartości liczbowe tych zmiennych.

Współczynniki, ilustrujące powiązanie między zmiennymi występującymi w nagłówkach kolumn a zmiennymi występującymi na lewym marginesie wierszy, są współczynnikami równań (11) do (19). Pola niewypełnione oznaczają brak powiązania, co odpowiada zerowym współczynnikom.

Teraz należy rozpatrzyć, jakie nowe zmienne należy wprowadzić do rozwiązania początkowego, aby je poprawić, czyli zmniejszyć wartość  $K$ .

Zwróćmy uwagę, że następujące zmienne decyzyjne nie występują w równaniu kryterium (20):

$$X_{132}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{314}, X_{2314}$$

Na 30 zmiennych decyzyjnych w funkcji-kryterium występuje 24 zmiennych, a więc jest 6 zmiennych, których wprowadzanie do rozwiązania nie powiększy wartości  $K$ .

Można wyjaśnić, że te sześć części wiązek przebiega wyłącznie w istniejących liniach.

Kolejność wprowadzania zmiennych jest w podanej sytuacji obojętna, więc rozpocznijmy od wprowadzenia zmiennej  $X_{132}$ .

Z odpowiedniej kolumny tabl. 1 można odczytać, że zmienna  $X_{132}$  wykazuje powiązanie z  $S_1$ ,  $S_7$  i  $S_9$ . Tłumaczy się to w ten sposób, że wprowadzenie łączy na drodze 1-3-2 jednocześnie powoduje zmniejszenie liczby niewprowadzonych łączy z relacji 1-2 ( $S_1$ ), wykorzystanie zdolności przepustowych w linii 1-3 ( $S_7$ ) oraz wykorzystanie zdolności przepustowych linii 2-3 ( $S_9$ ). Dążąc do tego, aby wprowadzić największą liczbę łączy  $X_{132}$ , jesteśmy ograniczeni tym, który z tych trzech czynników jest wąskim gardłem. W rozwiązaniu początkowym było:

$$S_1 = 100, S_7 = 200, S_9 = 120$$

można więc co najwyżej wprowadzić 100 łączy na drodze 1-3-2 i w ten sposób zniknie zmienna  $S_1$ , czyli zostanie wyrugowana.

Zmienna  $X_{132}$  zajmie w tabl. 1 miejsce zmiennej  $S_1$ , a zmienna  $S_7$  i  $S_9$  ulegną zmniejszeniu o 100 łączy.

Tablica simpleks może być również czytana kolumnami.

Wobec tego korzystając z odpowiedniej kolumny tabl. 1 stwierdzamy zależność

$$X_{132} = S_1 + S_7 + S_9$$

Rugowana zmienna  $S_1$  w stosunku do pozostałych zmiennych związana jest zależnością

$$S_1 = X_{132} - S_7 - S_9 \quad (21)$$







Zależność tę wykorzystujemy przy konstruowaniu kolejnej tablicy simpleks. Pokażemy na przykładzie, jak powstają współczynniki nowej tablicy.

Na przykład z tablicy 1 stwierdzamy, że

$$X_{142} = S_1 + S_8$$

Wykorzystując zależność (21) będziemy teraz mieli

$$X_{142} = X_{132} - S_7 + S_8 - S_9$$

co daje współczynniki nowej tablicy (tabl. 2). Należy zresztą dodać, że zmiany współczynników wystąpią tylko w tych kolumnach, w których występowało powiązanie ze zmienną rugowaną  $S_1$ .

Z kolei wprowadzamy do rozwiązania  $X_{13}$ ; wielkość tej zmiennej jest ograniczona przez  $S_7$ , wobec tego do rozwiązania wchodzi  $X_{13} = 100$ , a zmienna  $S_7$  ulega wyrugowaniu.

Z tablicy 2 stwierdzamy, że

$$X_{13} = S_2 + S_7$$

a rugowana zmienna

$$S_7 = X_{13} - S_2 \quad (22)$$

Wykorzystując tę zależność przy wyznaczeniu współczynników nowej tablicy simpleks i zmieniając odpowiednio wartość dla  $S_2$  na prawym marginesie otrzymuje się tabl. 3.

Spośród tych zmiennych decyzyjnych, które nie występują w równaniu kryterium (20) wprowadzamy obecnie do rozwiązania  $X_{14}$ . Z tabl. 3 można stwierdzić, że maksymalna wartość, jaką może przybrać  $X_{14}$ , wynosi 100 i w związku z tym podlega wyrugowaniu  $S_8$ .

Ponieważ z tabl. 3

$$X_{14} = S_3 + S_8$$

więc

$$S_8 = X_{14} - S_3 \quad (23)$$

Wykorzystując tę zależność tworzy się kolejną tablicę simpleks (tabl. 4).

Z kolei wprowadzamy do rozwiązania zmienną  $X_{23}$ . Z odpowiedniej kolumny tabl. 4 stwierdzamy, że istnieje zależność

$$X_{23} = S_4 + S_9$$

Ponieważ w dotychczasowym rozwiązaniu  $S_4 = 80$ , a  $S_9 = 20$ , maksymalna więc wartość, jaką może przybrać zmienna  $X_{23}$ , wynosi 20. Wówczas ulega wyrugowaniu (przyjmuje wartość zerową) zmienna  $S_9$ , a zmienna  $S_4$  zmniejsza się do wartości 60.

Przy wyznaczaniu nowej tablicy simpleks (tabl. 5) należy posługiwać się zależnością

$$S_9 = X_{23} - S_4 \quad (24)$$

Spośród sześciu zmiennych decyzyjnych wymienionych powyżej wprowadzono do rozwiązania już cztery zmienne ( $X_{132}$ ,  $X_{13}$ ,  $X_{14}$  i  $X_{23}$ ).

Teraz kolej przypada na zmienną  $X_{314}$ , która też tym się charakteryzuje, że nie występuje w równaniu kryterium, gdyż łącza na drodze 3-1-4 są realizowane wyłącznie w istniejących liniach.

Z kolumny o nagłówku „ $X_{314}$ ” w tabl. 5 stwierdzamy zależność

$$X_{314} = -S_2 - S_3 + S_6 + X_{13} + X_{14} \quad (25)$$

Mając na uwadze, że zmiany wielkości po prawej stronie tej zależności należy odczytywać z przeciwnym znakiem, równanie (25) można odczytać w ten sposób, że wprowadzenie jednego łącza na drodze 3-1-4 wymaga zmniejszenia o jedno łącze wielkości  $X_{13}$  i wielkości  $X_{14}$ , co jest zrozumiałe wobec faktu, że w dotychczasowym rozwiązaniu rozplywu zostały już w pełni wykorzystane zdolności przepustowe wszystkich istniejących linii ( $S_7 = S_8 = S_9 = 0$ ). Ponadto z równania odczytujemy, że ulegną powiększeniu wielkości  $S_2$  i  $S_3$ , gdyż wyrugowane łącza przejdą do rezerwy łączy jeszcze nie wprowadzonych do rozplywu. W końcu wprowadzenie łączy  $X_{314}$  zmniejszy rezerwę łączy w relacji 3-4 (czyli wielkość  $S_6$ ). Badając wpływ zwiększenia  $S_2$  i  $S_3$  oraz zmniejszenia  $S_6$  na wyrażenie  $K$  w równaniu (20) przekonujemy się, że wartość  $K$  ulegnie zwiększeniu, co oznacza, że wprowadzanie łączy  $X_{314}$  jest niekorzystne. Podobnie można przekonać się, że nie należy wprowadzać łączy  $X_{2314}$ .

Badając tabl. 5 można się przekonać, że tylko w kolumnie  $X_{12}$  występują dwie dodatnie jedności na poziomie wierszy przynależnych zmiennym sztucznym ( $S_2 \dots S_6$ ). Oznacza to, że wprowadzenie jednego łącza  $X_{12}$  spowoduje zmniejszenie wartości  $K$  o  $2M$ .

Wprowadzenie łączy  $X_{12}$  umożliwi zmniejszenie wielkości  $X_{132}$ , a przez to umożliwi powiększenie liczby łączy  $X_{13}$  i  $X_{23}$ . Wynika to z zależności

$$X_{12} = X_{132} + S_2 + S_4 - X_{13} - X_{23}$$

Regulowaniu podlega zmienna  $S_2$ , gdyż ona też ogranicza liczbę łączy  $X_{12}$ . Wykorzystując zależność

$$S_2 = X_{12} - X_{132} - S_4 + X_{13} + X_{23} \quad (26)$$

konstruuje się kolejną tablicę simpleks (tabl. 6).

Badając tę tablicę można zauważyć, że w kolumnie  $X_{134}$  występują dwie dodatnie jedności na poziomie wiersza  $S_3$  i  $S_4$ , co oznacza, że wprowadzenie jednego łącza na drodze 1-3-4 powoduje zmniejszenie wartości  $K$  o  $2M$ .

Najmniejszą wartość spośród zmiennych związanych z  $X_{134}$  dodatnim współczynnikiem — posiada  $S_4$ , wobec tego ta zmienna podlega rugowaniu.

Zależność odczytaną z tablicy 6

$$X_{134} = X_{132} - X_{12} + S_3 + S_4 - X_{23}$$

można przekształcić na zależność

$$S_4 = X_{134} - X_{132} + X_{12} - S_3 + X_{23} \quad (27)$$

Na tej podstawie wychodząc ze współczynników poprzedniej tablicy simpleks (tabl. 6) można obliczyć współczynniki następnej tablicy (tabl. 7).

Na podstawie pobieżnego przejrzenia tej tablicy ze zwróceniem uwagi, w jakich kolumnach występują dodatnie współczynniki w wierszach  $S_3$ ,  $S_5$  i  $S_6$  (gdyż te zmienne mają obecnie największe znaczenie w polepszaniu wartości  $K$ ) kandydują do wprowadzenia do rozwiązania następujące zmienne:  $X_{123}$ ,  $X_{1234}$ ,  $X_{234}$ . Dla dokonania ostatecznego wyboru, którą z tych zmiennych wprowadzić do rozwiązania, przeprowadzono obliczenie wpływu tych zmiennych na funkcję-kryterium, co przedstawia tabl. D.

Wynik tego obliczenia jednoznacznie wskazuje, że należy do rozwiązania wprowadzić  $X_{234}$ . Rugowaniu będzie podlegać zmienna  $S_3$ .

Ponieważ z tabl. 7

$$X_{234} = X_{132} - X_{12} + S_3 - X_{134} + S_5$$

rugowana więc zmienna w uzależnieniu od pozostałych zmiennych przedstawia się następująco:

$$S_3 = X_{234} - X_{132} + X_{12} + X_{134} - S_5 \quad (28)$$

Na tej podstawie tabl. 7 ulega przekształceniu na tabl. 8.

Przypomnijmy, że dotychczasowe poszczególne fazy rachunku polegają na tym, że kolejno uzyskuje się coraz lepsze rozwiązanie, z których każde musi być, oczywiście, rozwiązaniem dopuszczalnym, tzn. musi spełniać układ równań (11) do (19). Sprawdźmy, czy ostatnio otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem dopuszczalnym.

Tablica D

	Wzrost kilometrolączy ( $K$ ) spowodowany wprowadzeniem do rozwiązania jednego łącza		
	$X_{123}$	$X_{1234}$	$X_{234}$
Bezpośredni wpływ na funkcję-kryterium	20	70	50
poprzez zmianę $X_{132}$	0	0	0
poprzez zmianę $X_{12}$	20	20	20
poprzez zmianę $S_3$	$-2M$	$-2M$	$-M$
poprzez zmianę $X_{134}$	100	50	50
poprzez zmianę $S_5$	0	0	$-M$
poprzez zmianę $S_6$	0	0	0
poprzez zmianę $X_{13}$	0	0	0
poprzez zmianę $X_{14}$	0	0	0
poprzez zmianę $X_{23}$	0	0	0
Razem:	$140-2M$	$140-2M$	$120-2M$

Z tablicy 8 otrzymujemy wartości zmiennych wchodzących do uzyskanego ostatecznie rozwiązania:

$$X_{12} = 70, X_{132} = 30, X_{13} = 120, X_{14} = 100, X_{134} = 50 \\ X_{23} = 80, X_{234} = 10, S_5 = 50, S_6 = 70.$$

Podstawiając te wartości do równania (11) otrzymujemy łączą w relacji 1-2

$$70 + 30 = 100$$

Podstawiając do równania (12) przekonujemy się, że cała wiązka w relacji 1-3 skierowana jest w tym rozwiązaniu jedną drogą

$$120 = 120$$

Podstawiając zmienne rozwiązania do równania (13) dowiadujemy się, że wiązka łączy w relacji 1-4 została podzielona na 2 części

$$100 + 50 = 150$$

Według równania (14) otrzymujemy łączą w relacji 2-3

$$80 = 80$$

Podstawiając do równania (15) otrzymujemy, że z wiązki łączy 2-4 tylko 10 łączy zostało dotychczas wprowadzone do rozplywu, a reszta jest jeszcze w rezerwie ( $S_5$ )

$$10 + 50 = 60$$

Natomiast z równania (16) wynika, że wszystkie łączą w relacji 3-4 znajdują się jeszcze w rezerwie

$$70 = 70$$

Podstawiając wartości zmiennych do równania (17) uzyskujemy te łączą, które zostały skierowane w linii 1-3

$$30 + 120 + 50 = 200$$

Według równania (18) tylko jedna wiązka łączy znalazła się w linii 1-4

$$100 = 100$$

W końcu według równania (19)

$$30 + 80 + 10 = 120$$

Sprawdzenie to, które zresztą warto robić po każdym etapie rachunku, przekonuje, że dotychczas otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem dopuszczalnym, czyli że w dotychczasowych obliczeniach nie popełniono błędu.

W dotychczasowym rozwiązaniu występują jeszcze dwie zmienne sztuczne  $S_5$  i  $S_6$ . Ponieważ w funkcji-kryterium (20) do tych zmiennych przywiązane są nieskończenie wielkie współczynniki  $M$ , do wprowadzenia

więc do rozwiązania będą kandydować te zmienne decyzyjne, które spowodują najwydatniejsze zmniejszenie tych obu zmiennych sztucznych.

Rozpatrując wiersze dla  $S_5$  i  $S_6$  w tabl. 8 zwraca uwagę, że zmienne  $X_{2413}$  i  $X_{314}$  powodują zmniejszenie funkcji  $K$  o  $3M$ .

Aby zdecydować, którą z tych dwu zmiennych należy ostatecznie wprowadzić, przeprowadzamy następujące obliczenie podane w tabl. E.

Tablica E

	Wzrost kilometrażu ( $K$ ) spowodowany wprowadzeniem do rozwiązania jednego łącza	
	$X_{2413}$	$X_{314}$
Bezpośredni wpływ na funkcję-kryterium	60	0
poprzez zmianę $X_{132}$	0	0
poprzez zmianę $X_{12}$	$2 \cdot 20 = 40$	$2 \cdot 20 = 40$
poprzez zmianę $X_{234}$	$3 \cdot 50 = 150$	$2 \cdot 50 = 100$
poprzez zmianę $X_{134}$	$1 \cdot 50 = 50$	$1 \cdot 50 = 50$
poprzez zmianę $S_5$	$-3M$	$-2M$
poprzez zmianę $S_6$	0	$-M$
poprzez zmianę $X_{13}$	0	0
poprzez zmianę $X_{14}$	0	0
poprzez zmianę $X_{23}$	0	0
Razem:	$300 - 3M$	$190 - 3M$

Na tej podstawie uznajemy, że korzystniejsze jest wprowadzenie  $X_{314}$ . Według odpowiedniej kolumny tabl. 8 ustalamy, że

$$\bar{X}_{314} = 2 X_{132} - 2 X_{12} - 2 X_{234} - X_{134} + 2 S_5 + S_6 + X_{14}$$

Zależność ta oznacza, że w aktualnej sytuacji w rozplywie łączy wprowadzenie jednego łącza  $X_{314}$  będzie związane:

- ze zmniejszeniem  $X_{132}$  o 2 łącza,
- ze zwiększeniem  $X_{12}$  o 2 łącza,
- ze zwiększeniem  $X_{234}$  o 2 łącza,
- ze zwiększeniem  $X_{134}$  o 1 łącze,
- ze zmniejszeniem  $X_{14}$  o 1 łącze,
- ze zmniejszeniem rezerwy  $S_5$  o 2 łącza,
- ze zmniejszeniem rezerwy  $S_6$  o 1 łącze.

Na tym przykładzie dopiero ujawnia się sens obliczania wszystkich współczynników tablicy simpleks. W miarę postępu rozplywu w sieci robi się „ciaśniej” i w związku z tym coraz bardziej komplikują się wzajemne uzależnienia między wiązkami łączy. Wyraża się to w ten

sposób, że obecnie w tablicy simpleks jest więcej współczynników niż na początku (w tabl.1) i występują współczynniki w wysokości 2 a nawet 3. Bez tablicy simpleks byłoby bardzo trudno wszystkie te uzależnienia wydedukować.

Można powiedzieć, że tablica simpleks poprzez kolejne przekształcenia niejako przemyślała za nas wszystkie występujące w tej sieci zależności.

Dzieląc w tablicy 8 wartości na prawym marginesie przez współczynniki (tylko dodatnie) z kolumny  $X_{314}$  przekonujemy się, że maksymalna wielkość zmiennej  $X_{314}$  wynosi 15 i jej wprowadzenie będzie związane z wyrugowaniem zmiennej  $X_{132}$ .

Z ostatniej zależności otrzymujemy

$$X_{132} = \frac{1}{2} X_{314} + X_{12} + X_{234} + \frac{1}{2} X_{134} - S_5 - \frac{1}{2} S_6 - \frac{1}{2} X_{14} \quad (29)$$

Na tej podstawie tabl. 8 ulega przekształceniu na tabl. 9.

Analizując tę tablicę można dojść do wniosku, że należy z kolei wprowadzić zmienną  $X_{34}$ . Ponieważ w kolumnie  $X_{34}$  jest tylko jeden współczynnik równy jedności, stwierdzamy więc

$$X_{34} = S_6$$

Nie wymaga to zmiany wszystkich współczynników tablicy, a tylko wprowadzenie tej zmiennej zaznaczamy na lewym marginesie tabl. 9.

W podobny sposób wprowadzamy

$$X_{24} = S_5$$

Uzyskaliśmy rozwiązanie, które tym się charakteryzuje, że zniknęły wszystkie zmienne sztuczne ( $S_1$  do  $S_6$ ), tzn. do rozplywu wprowadzono już wszystkie potrzebne łączy.

Rozwiązanie to przedstawia się w sposób następujący:

$$\begin{aligned} X_{12} &= 100, X_{13} = 120, X_{14} = 85, X_{134} = 65, X_{23} = 80 \\ X_{24} &= 20, X_{234} = 40, X_{34} = 55, X_{314} = 15. \end{aligned}$$

Rozplyw łączy według tego rozwiązania przedstawiony jest na rys. 2. Z rysunku wynika, że według tego rozwiązania w liniach istniejących: 1-3, 1-4 i 2-3 zostają w pełni wykorzystane możliwości przepustowe, natomiast w nowych liniach będzie należało zrealizować:

- w linii 1-2 — 100 łączy
- w linii 2-4 — 20 łączy
- w linii 3-4 — razem 160 łączy

Ogółem liczba kilometrołączy w tych liniach wynosi  $K = 11200$  kmłączy.

Jednakże nie należy sądzić, że uzyskaliśmy w ten sposób rozwiązanie optymalne. Aby o tym się przekonać, należy sprawdzić, czy wyniku nie poprawi, czyli, czy nie zmniejszy funkcji-kryterium  $K$  wprowadzenie którejkolwiek zmiennej nie występującej w dotychczasowym rozwiązaniu.

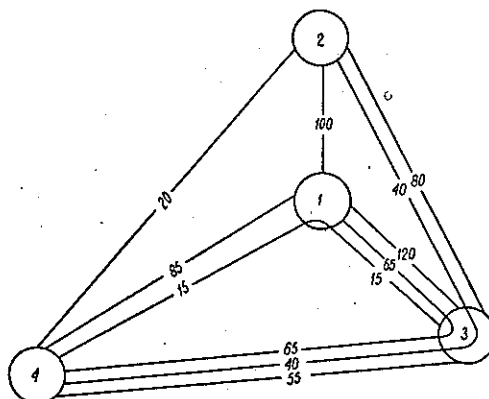






Badanie takie — na wzór wyżej przytoczonych dwóch takich obliczeń — obejmujące wszystkie zmienne z wykorzystaniem współczynników tabl. 9 przedstawione jest w tabl. 9A.

Na podstawie tej tablicy stwierdzamy, że wprowadzenie łączy  $X_{132}$  powoduje zmniejszenie funkcji kilometrołączy  $K$ .



Rys. 2. Przejściowe rozwiązanie przykładowego rozplywu łączy

Z kolumny  $X_{132}$  w tabl. 9 stwierdzamy zależność

$$X_{132} = \frac{1}{2} X_{314} + X_{12} + X_{234} + \frac{1}{2} X_{134} - X_{24} - \frac{1}{2} X_{34} - \frac{1}{2} X_{14}$$

Dzieląc wartości zmiennych na prawym marginesie tablicy simpleks przez współczynniki kolumny  $X_{132}$  przekonujemy się, że rugowaniu będzie podlegać zmienna  $X_{314}$

$$X_{314} = 2 X_{132} - 2 X_{12} - 2 X_{234} - X_{134} + 2 X_{24} + X_{34} + X_{14} \quad (30)$$

Na podstawie tej zależności przekształca się tabl. 9 na tabl. 10.

Dla przekonania się, czy do ostatniego rozwiązania można wprowadzić zmiany poprawiające funkcję kilometrołączy sporządzamy tabl. 10A.

Z tablicy tej wnioskujemy, że jakkolwiek zmiana w uzyskanym rozwiązaniu zwiększa wartość funkcji  $K$ , a więc pogarsza rozwiązanie.

Rozwiązanie osiągnięte w tabl. 10 jest przeto rozwiązaniem optymalnym i ostatecznym.

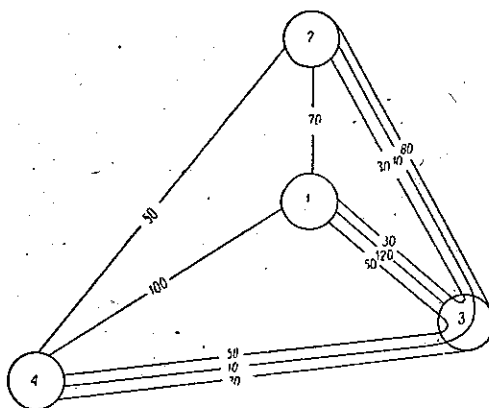
Tak więc rozwiązując za pomocą algorytmu simpleks model programowania liniowego uzyskaliśmy następujący optymalny rozplyw łączy dla określonych w przykładzie warunków:

$$\begin{array}{ll} X_{12} = 70 & X_{134} = 50 \\ X_{132} = 30 & X_{23} = 80 \\ X_{13} = 120 & X_{24} = 50 \\ X_{14} = 100 & X_{234} = 10 \\ & X_{34} = 70 \end{array}$$

Optymalny rozpliw łączy przedstawiony jest na rys. 3.

Rozwiązanie to charakteryzuje się pełnym wykorzystaniem zdolności przepustowych wszystkich istniejących linii. Przewiduje ono potrzebę budowy trzech nowych linii teletransmisyjnych, w których trzeba będzie zrealizować następujące liczby łączy:

- w linii 1—2 (o długości 20 km) — 70 łączy
- w linii 2—4 (o długości 60 km) — 50 łączy
- w linii 3—4 (o długości 50 km) — razem 130 łączy.



Rys. 3. Optymalny rozpliw łączy według kryterium minimum kilometrołączy

Łączna liczba kilometrołączy nowych linii według tego rozpliwu wynosi  $K = 10\,900$  kilometrołączy, a więc jest to rozpliw z punktu widzenia ilości kilometrołączy korzystniejszy od przedstawionego na rys. 2.

## 8. WARIANT ROZWIĄZANIA ZE ZMNIĘSZONĄ LICZBĄ NOWO BUDOWANYCH LINII

Uzyskane rozwiązanie przedstawione na rys. 3 jest optymalnym rozpliwem łączy z punktu widzenia minimum kilometrołączy nowo budowanych linii teletransmisyjnych.

Jednakże, jak o tym już była mowa, kryterium minimum kilometrołączy nie jest jedynym, ani nie jest najważniejszym kryterium ekonomiczności sieci teletransmisyjnych. W miarę wzrostu krotności systemów teletransmisyjnych nabiera coraz większej wagi ta część kosztów budowy linii, która nie zależy od ilości łączy, gdyż uruchomienie dużych ilości łączy odbywa się stosunkowo nieznacznym kosztem.

W tej sytuacji występuje zainteresowanie takimi rozwiązaniami rozpliwu łączy, w których udaje się uniknąć budowy pewnych odcinków

sieci, skupiając jak największy strumień łączy w tych odcinkach, których budowa jest nieunikniona.

Tablica simpleks (tabl. 10) stanowiąca ostatnią fazę rozwiązania rozpatrywanego przykładu umożliwia ustalenie, budowę których z nowych linii udałoby się pominąć i jakie spowoduje to konsekwencje w rozplywie łączy.

Rozplyw łączy przedstawiony na rys. 3 przewiduje budowę 3 nowych linii: 1—2, 2—4 i 3—4.

Rozpatrzmy na podstawie tabl. 10 możliwość niebudowania linii 1—2.

Wymagałoby to wyrugowania z rozwiązania zmiennej  $X_{12} = 70$  łączy. Poprzez dodatnie współczynniki wiersza odpowiadającego zmiennej  $X_{12}$  odnajdujemy te nowe zmienne, których wprowadzenie mogłoby wyrugować zmienną  $X_{12}$ . Są to takie zmienne, jak  $X_{123}$ ,  $X_{1243}$ ,  $X_{124}$  i  $X_{1234}$ . Jednak wszystkie te łączy przebiegają w linii 1—2, a więc nie uda się uniknąć budowy linii 1—2.

Z kolei rozważmy możliwość niebudowania linii 2—4, czyli wyrugowania z rozwiązania łączy  $X_{24}$ . Współczynniki w wierszu  $X_{24}$  tabl. 10 wskazują na zmienne związane ze zmienną  $X_{24}$ . Jednak nie wszystkie te zmienne powodowałyby wyrugowanie zmiennej  $X_{24}$ . Tak np. zmienna  $X_{142}$  jest wprawdzie związana z  $X_{24}$  (współczynnik = 1), jednak wprowadzenie zmiennej  $X_{142}$  wymagałoby wyrugowania zmiennej  $X_{132}$  jako mniejszej ( $X_{132} = 30$ , a  $X_{24} = 50$ ). Analizując wszystkie możliwości można stwierdzić, że wyrugowanie zmiennej  $X_{24}$  uda się zrealizować wprowadzając albo  $X_{213}$ , albo  $X_{214}$ , albo  $X_{2134}$ . W ten sposób uzyskuje się w 3 wariantach rozplyw łączy w założeniu niebudowania linii 2—4. Warianty te uzyskuje się z dotychczasowego rozwiązania w sposób podany w tablicy F.

Tablica F

Rozwiązanie a	Rozwiązanie b	Rozwiązanie c
wprowadzenie $X_{213} = 25$	wprowadzenie $X_{214} = 25$	wprowadzenie $X_{2134} = 25$
$X_{132} = 30 - 25 = 5$	$X_{132} = 30 - 25 = 5$	$X_{132} = 30 - 25 = 5$
$X_{12} = 70 + 25 = 95$	$X_{12} = 70 + 25 = 95$	$X_{12} = 70 + 25 = 95$
$X_{234} = 10 + 2 \cdot 25 = 60$	$X_{234} = 10 + 25 = 35$	$X_{234} = 10 + 25 = 35$
$X_{134} = = 50$	$X_{134} = 50 + 25 = 75$	$X_{134} = = 50$
$X_{213} = = 25$	$X_{214} = = 25$	$X_{2134} = = 25$
$X_{34} = = 70$	$X_{34} = = 70$	$X_{34} = = 70$
$X_{13} = = 120$	$X_{13} = = 120$	$X_{13} = = 120$
$X_{14} = = 100$	$X_{14} = 100 - 25 = 75$	$X_{14} = = 100$
$X_{23} = 80 - 25 = 55$	$X_{23} = = 80$	$X_{23} = = 80$

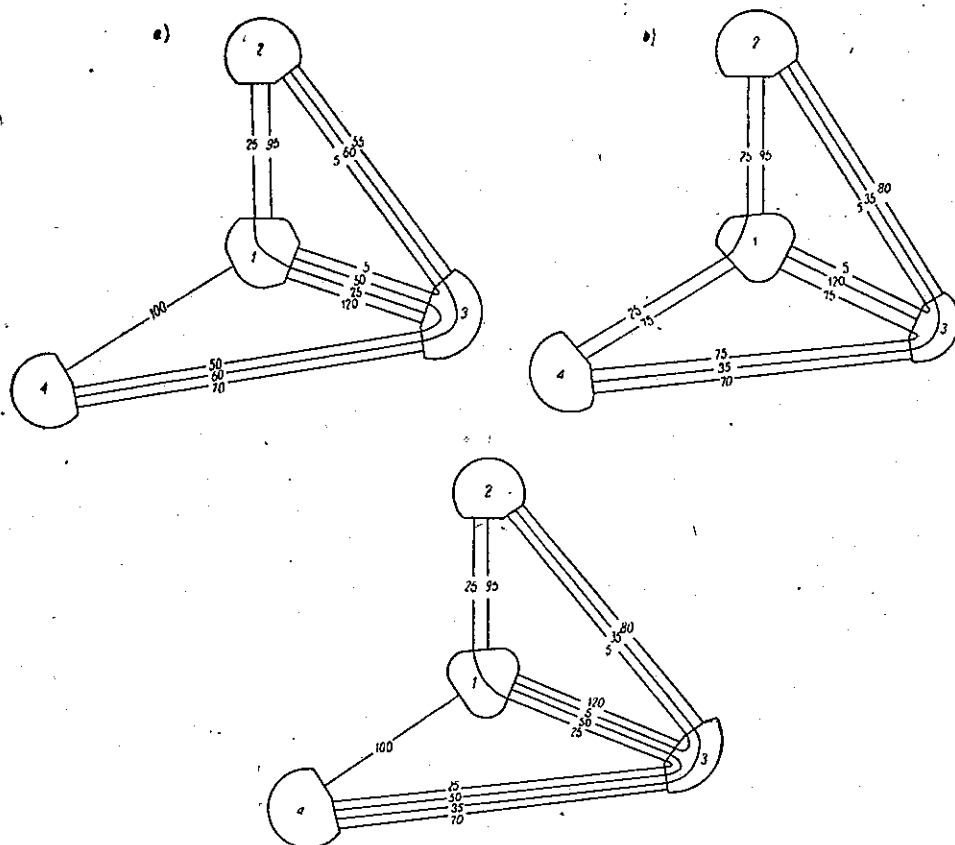
Rozwiązania te są przedstawione na rys. 4.

Tak np. przyjęcie wariantu wg rys. 4a wymagałoby budowania:

linii 1—2 (o długości 20 km) dla 120 łączy,

linii 3—4 (o długości 50 km) dla 180 łączy,

co daje 11400 kilometrołączy w nowych liniach. Można obliczyć, że również warianty wg rys. 4b, c wykazują tę samą ilość kilometrołączy. Jak można było oczekiwać, warianty rozpiływu łączy według rys. 4 są mniej korzystne z punktu widzenia liczby kilometrołączy. Tym niemniej mogą być korzystniejsze z punktu widzenia kosztów inwestycyjnych.



Rys. 4. Warianty rozpiływu łączy w sieci bez linii 2—4

Obliczenie kosztów inwestycyjnych przedstawiono w tabl. G (w założeniu, że linie kablowe typu okręgowego niepupinizowane pracują w systemie naturalnym).

Z porównania tych wyników wnioskujemy, że jeżeli jako kryterium wyboru przyjąć koszty inwestycyjne nowych linii — wariant rozwiązania według rys. 4 (bez linii 2—4) jest ekonomicznie najkorzystniejszy.

Na podstawie tablicy 10 można przekonać się, że nie udaje się uzyskać rozpiętych łączy bez linii 3—4.

Tablica G

Dla projektu sieci wg rys. 3				
Linia	Liczba łączy	Koszt 1 km linii w tys. zł	Długość linii w km	Koszt inwestycyjny w tys. zł
1—2	70	138	20	2 760
2—4	50	112	60	6 720
3—4	130	205	50	10 250
			Razem	19 730
Dla projektu sieci wg rys. 4				
Linia	Liczba łączy	Koszt 1 km linii w tys. zł	Długość linii w km	Koszt inwestycyjny w tys. zł
1—2	120	195	20	3 900
3—4	180	258	50	12 900
			Razem:	16 800

## 9. WNIOSKI

1. Można sądzić, że przedstawione rozwiązanie przykładowej sieci telekomunikacyjnej udowodniło, iż tego rodzaju zagadnienia optymalizacji projektów rozbudowy sieci mogą być rozwiązywane za pomocą metod programowania liniowego.

2. Można spodziewać się, że matematyczne rozwiązywanie zagadnień projektowania sieci przyczyni się do obniżenia kosztów inwestycyjnych budowy sieci. Według źródeł zagranicznych zastosowanie metod programowania liniowego do zagadnień gospodarczych powoduje oszczędność nakładów rzędu 7—10% w stosunku do rozwiązań przyjmowanych intuicyjnie bez stosowania metod matematycznych.

Ponieważ inwestycje dotyczące linii teletransmisyjnych są bardzo kosztowne, szansa więc uzyskania nawet procentowych oszczędności uzasadnia skierowanie w tym kierunku poważnych badań.

3. W miarę wzrostu liczby punktów (central) rozpatrywanej sieci wzrasta bardzo szybko liczba zmiennych decyzyjnych występujących w mo-

delu matematycznym sieci, a przez to staje się praktycznie niemożliwe uzyskanie rozwiązania przy użyciu tradycyjnych środków i jedyna możliwość rozwiązania modelu polega na wykorzystaniu maszyn liczących.

4. Poza próbami zastosowań maszyn liczących do projektowania sieci telekomunikacyjnych dalsze prace w tym zakresie powinny polegać na:

- opracowaniu i formułowaniu w języku matematycznym najważniejszych kryteriów wyboru optymalnej sieci telekomunikacyjnej,
- poszukiwaniu prostszych i szybszych algorytmów rozwiązywania tego rodzaju modeli (np. algorytm transportowy).

#### WYKAZ LITERATURY

1. W. Sadowski: Teoria podejmowania decyzji. PWN, Warszawa 1960.
2. Zastosowanie matematyki w badaniach ekonomicznych, pod redakcją W. Niemczynowa. PWE, Warszawa 1961.
3. R. G. D. Allen: Ekonomia matematyczna. PWN, Warszawa 1961.
4. A. S. Barsow: Co to jest programowanie liniowe. PWN, Warszawa 1961.
5. Z. Dudziński: Możliwości zastosowania metod matematycznych w ekonomicznej łączności. Biuletyn techniczny Ministerstwa Łączności nr 2/63.

36. Дудзински

#### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ СЕТИ ДАЛЬНЕЙ СВЯЗИ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДА

##### Резюме

Темой статьи является вопрос оптимального проектирования сети дальней связи при использовании методов линейного программирования. Представлен ход вычислений по алгоритму симплексного метода для примера сети между четырьмя пунктами (междугородными телефонными станциями). В начальных частях статьи охарактеризовано общим образом проблематику проектирования сети линий дальней связи на базе данной сети связей и подчеркнута экономические аспекты. Описаны возможности применения методов линейного программирования для определения оптимального плана направления связей в сети линий.

В первой фазе решения в качестве критерия оптимальности принято условие минимума километроканалов новых линий. Представлен, вместе со всеми ведущими к этому вычислениями, оптимальный план направления по вышеуказанному критерию. Показано, что некоторая модификация метода дает возможность определить оптимальное решение по критерию минимума расходов на строительство новых линий. Обращено внимание на возможность применения электронных цифровых вычислительных устройств для решения модели сети с большим количеством пунктов.

Zb. Dudziński

MATHEMATICAL METHOD OF SOLVING A MODEL OF TELECOMMUNICATION NETWORK BY MEANS OF THE SIMPLEX ALGORITHM

Summary

The article deals with the problem of optimum designing the telecommunication networks by means of linear programming. The calculating process with application of simplex algorithm is presented for a network example with four points (centers). In the first part of the article the problems of designing the networks of telecommunication lines are characterised in a general manner, taking into account economic aspects.

The possibility of applying the linear programming is treated on purpose to obtain the best plan of assigning the links to the line network. In the first phase of solving the problem the condition of the minimum "links X kilometers" of the lines is adopted as the criterion of the best solution. The optimum plan of assigning the links to the line networks accordingly to the above mentioned criterion is presented including all necessary calculations. It is shown further that certain modification of the method enables obtaining the best solution, accordingly to the criterion of minimum costs of the construction of new lines. The possibility of solving the network models by means of electronic computers is indicated for the network models with greater number of points.

Zb. Dudziński

SOLUTION MATHÉMATIQUE D'UN MODÈLE DU RÉSEAU DES TÉLÉCOMMUNICATIONS À L'AIDE DE L'ALGORITHME SIMPLEX

Résumé

Le sujet de l'article est le problème de projeter d'une manière la plus avantageuse les réseaux des télécommunications en se servant de la méthode de programmation linéaire.

Il a été présenté le procédé de calcul suivant l'algorithme simplexe pour un exemple du réseau à quatre points (centraux). Dans la première partie de l'article ont été caractérisés d'une manière générale des projets des réseaux des lignes des télécommunications basés sur le réseau des voies donné en tenant compte des aspects économiques. Ont été traitées ensuite les possibilités d'application de la programmation linéaire pour déterminer le meilleur plan d'assigner les voies aux réseaux respectifs des lignes. À la première phase de la solution comme le critère optimum on a accepté la condition de minimum „voies X kilomètres" de lignes nouvelles. A été présente ensuite le plan optimum d'assigner les voies en accord avec le critère accepté.

On a démontré, qu'une certaine modification de la méthode permet d'obtenir une solution optimum au point de vue du critère de moindres frais de construction des lignes nouvelles.

A été ensuite indiquée la possibilité d'appliquer les calculateurs électroniques dans les cas où les modèles des réseaux ont le nombre de points plus élevé.

Zb. Dudziński

MATHEMATISCHE LÖSUNG DES MODELLS EINES NACHRICHTENNETZES  
LAUT DER SIMPLEX-METHODE

## Zusammenfassung

Der Aufsatz behandelt die Frage des optimalen Entwerfens von Übertragungsnetzen durch Anwendung der Methoden des linearen Programmierens. Der Verlauf der Berechnung an Hand von Simplex-Methode wird an dem Beispiel eines Netzes gegenseitiger Verbindungen von vier Punkten (Vermittlungen) dargestellt. Einleitend wird die Problematik des Entwerfens eines Nachrichten-Liniennetzes für ein gegebenes Sprechkreisnetz allgemein charakterisiert, die einschlägigen ökonomischen Gesichtspunkte hervorgehoben und die Möglichkeit besprochen, einen optimalen Leitplan für die Sprechkreise innerhalb des Liniennetzes mit Methoden des linearen Programmierens zu bestimmen.

In der ersten Stufe der Lösung besteht das Optimalitätskriterium in einem Minimum der Sprechkreis-Kilometer-Zahl an neuen Linien; der laut diesem Kriterium optimale Leitplan wird samt dem ganzen Gang der ihn ergebenden Berechnung dargestellt. Es wird dann gezeigt, dass es durch eine Abart der Methode möglich wird, eine nach dem Kriterium minimaler Baukosten neuer Linien optimale Lösung zu bestimmen. Zum Schluss wird auf die Möglichkeit hingewiesen, Netzmodelle mit zahlreicheren Punkten an Hand von Digitalrechnern zu lösen.



WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE

Warszawa, Mazowiecka 2/4

polecają:

*Fijałkowski W.*

TELETRANSMISJA TELEGRAFICZNA

str. 332, rys. 262, tabl. 14, zł 49.—

*Kassenberg K., Ruciński J.*

ELEMENTY ŁĄCZENIOWE, SYGNALIZACYJNE I ZABEZPIECZAJĄCE

Tom 1. Wyd. 2, str. 235, rysunki, tablice, zł 21.50

Tom 3, str. 604, rysunki, tablice, zł 25.—

*Michel K.*

URZĄDZENIA TELETRANSMISYJNE TELEFONII NATURALNEJ

str. 415, rys. 527, tabl. 40, zł 39.—

*Nowicki W.*

ZASADY TELETRANSMISJI PRZEWODOWEJ

Tom 2, str. 478, rysunki, tablice, zł 44.—

*Pomirski H., Szpigler Z.*

KABLOWE LINIE TELEKOMUNIKACYJNE

str. 440, rysunki, tablice, zł 35.—

Do nabycia w księgarniach technicznych  
„Domu Książki”

WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE

Warszawa, Mazowiecka 2/4

polecają:

*Biéłousow A. P.*

WZMACNIACZE PARAMETRYCZNE Z DIODĄ POJEMNOŚCIOWĄ

Tłum. z ros. F. Wiśniewski

str. 180, rys. 46, zł 18.—

*Chomicz W. J.*

FERRYTOWE ANTENY ODBIORCZE

Tłum. z ros. S. Katz

str. 59, rys. 43, tabl. 3, zł 10.—

*Dujas Z., Szymel W.*

RADIOKOMUNIKACJA RUCHOMA NA FALACH METROWYCH

str. 388, rys. 382, tabl. 12, zł 56.—

*Ginzton E. L.*

MIERNICTWO MIKROFALOWE

Tłum. z ang. A. Kraszewski, L. Sokołowski, S. Stuchły

str. 468, rys. 267, tabl. 26, zł 85.—

*Panecki M., Litwin R., Drozdowicz L.*

TEORIA I TECHNIKA MIKROFALOWA

str. 506, rys. 487, tabl. 22, zł 89.—

*Stewart J. L.*

LINIE PRZESYŁOWE

Tłum. z ang. K. Kowalski, J. Majer

str. 206, rys. 72, tabl. 2, zł 23.—

*Jonscher A. K.*

PODSTAWY DZIAŁANIA PRZYRZĄDÓW PÓLPRZEWODNIKOWYCH

Tłum. z ang. W. Rosiński

str. 216, rys. 58, tabl. 4, zł 25.—

Do nabycia w księgarniach technicznych  
„Domu Książki”