INSTYTUT ŁĄCZNOŚCI

REFERATY PROBLEMOWE

Zeszyt 47

Zbigniew Kowalski

METODY WYZNACZANIA PARAMETRÓW PUNKTOWYCH APROKSYMAT TŁUMIENNOŚCI PASMOWEJ

Warszawa - listopad 1981

I N S T Y T U T   Ł Ą C Z N O Ś C I

KOŁO ZAKŁADOWE STOWARZYSZENIA ELEKTRYKÓW POLSKICH

Na prawach rękopisu

R E F E R A T Y   P R O B L E M O W E

Zeszyt 47

Zbigniew Kowalski

METODY WYZNACZANIA PARAMETRÓW PUNKTOWYCH APROKSYMAT TŁUMIENNOŚCI PASMOWEJ

Warszawa - listopad 1981

Zespół Redakcyjny
dr inż. Stanisław Sońta, mgr inż. Andrzej Stagrowski
mgr inż. Krystyna Frączek

Opracował:
dr inż. Zbigniew Kowalski
Zakład Sieci Telekomunikacyjnych /Z-3/

Instytut Łączności
04-894 Warszawa, ul. Szachowa 1, tel. 128-246

Praca Nr RB-1.2.01.F.01

Opiniował: doc. dr hab. inż. Stanisław Dymowski

Maszynopis dostarczono dnia 24 lipca 1981 r.

Wyprowadzono wzory, umożliwiające określanie współczynników wagowych punktowych aproksymat tłumienności pasmowej, a także wyznaczanie górnego kresu błędu niepoprawności tych aproksymat przy założonych częstotliwościach wyznaczania tłumienności punktowych. Przedstawiono metody określania optymalnych częstotliwości, maksymalizujących efektywność tworzonych aproksymat i podano odpowiednie wzory obliczeniowe dla liczby punktów aproksymacji $p \leqslant 4$.

Redaktor: mgr K. Juszkiewicz

Montaż tekstu: B. Drabik

Wpłynęło do Działu Wydawniczego Instytutu Łączności
dnia 5.X.1981 r.
Nakład 70 egz.

Zbigniew Kowalski

METODY WYZNACZANIA PARAMETRÓW PUNKTOWYCH APROKSYMAT TŁUMIENNOŚCI PASMOWEJ

S P I S   T R E Ś C I

DV

1. WPROWADZENIE

W referacie [3] wprowadzono rodzinę nowych skalarnych wielkości nazwanych tłumiennościami pasmowymi, które stanowią uogólnienie na całe pasmo przesyłowe wielkości znanych z klasycznej teorii czwórników elektrycznych: tłumienności punktowych, wyznaczanych przy ustalonych częstotliwościach transmitowanych sygnałów.

Zastosowanie tłumienności pasmowych przewiduje się m.in. przy projektowaniu sieci telefonicznych zamiast dotychczas stosowanej tłumienności odniesienia, która wykazuje istotne wady użytkowe /patrz referat [3]/.

Ponieważ w dotychczasowej praktyce wartości tłumienności czwórników są wyznaczane punktowo, tzn. przy ustalonych częstotliwościach, więc zachodzi potrzeba szacowania tłumienności pasmowej na podstawie liniowych kombinacji tłumienności punktowych. Zasady szacowania tłumienności pasmowej na podstawie danych punktowych przedstawiono w referacie [4]; niniejszy zaś referat stanowi kontynuację tej samej tematyki i ma na celu prezentację konkretnych metod obliczania parametrów wzmiankowanych kombinacji liniowych, nazwanych punktowymi aproksymatami tłumienności pasmowej.

W referacie [3] zdefiniowano tłumienność pasmową czwórnika jako funkcjonał określony wzorem:

$$\bar{A} = \int_{f_d}^{f_g} g(f)\,\varphi(f)\,df \qquad /1\text{-}1/$$

gdzie g jest unormowaną funkcją gęstości wagi w paśmie przesyłowym o częstotliwościach granicznych: f_d i f_g, zaś φ - częstotliwościową charakterystyką tłumienności rozważanego czwórnika.

W referacie [4] wykazano, że tłumienność pasmową czwórnika można wyrazić wzorem:

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^{p} G_k \cdot \varphi(f_k) + \bar{R}_p \qquad /1\text{-}2/$$

gdzie $\varphi(f_k)$ oznaczają tłumienności punktowe rozważanego czwórnika przy ustalonych częstotliwościach f_k, przy czym:

$$f_d \leqslant f_1 < f_2 < \ldots < f_{p-1} < f_p \leqslant f_g \qquad /1\text{-}3/$$

Występujące we wzorze /1-2/ współczynniki wagowe są równe:

$$G_k = \frac{J_{p/k}}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} (f_k - f_j)} \qquad /1\text{-}4/$$

gdzie:

$$J_{p/k} = \int_{f_d}^{f_g} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} (f - f_j)\, g(f)\, df \qquad /1\text{-}5/$$

Natomiast górny kres modułu wielkości $\overline{R}_p$ występującej we wzorze /1-2/ można określić z nierówności:

$$\left|\overline{R}_p\right| \leqslant \frac{M_p}{p!} \cdot \left|J_p\right| \qquad /1\text{-}6/$$

gdzie

$$J_p = \int_{f_d}^{f_g} \prod_{j=1}^{p} (f - f_j)\, g(f)\, df \qquad /1\text{-}7/$$

zaś M_p jest górną granicą modułu pochodnej rzędu p częstotliwościowej charakterystyki tłumienności rozważanego czwórnika w pasmie przesyłowym.

Punktową aproksymatę tłumienności pasmowej czwórnika zdefiniowano jako kombinację liniową oszacowań $\mathbf{A}_k$ tłumienności punktowych przy częstotliwościach f_k tego czwórnika[x/]:

[x/] Uwaga: czcionkami tłustymi oznaczono symbole wielkości będących zmiennymi losowymi.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^{p} G_k \cdot \mathbf{A}_k \qquad /1\text{-}8/$$

Jeżeli przyjmiemy, że oszacowania $\mathbf{A}_k$ nie wykazują błędu niepoprawności, natomiast charakteryzują się niezależną od częstotliwości wartością σ błędu standardowego niepewności, to wartość oczekiwana aproksymaty określonej wzorem /1-8/ wyniesie:

$$E\left\{\tilde{\mathbf{A}}\right\} = \sum_{k=1}^{p} G_k \cdot \varphi(f_k) \qquad /1\text{-}9/$$

zaś jej warjancja:

$$D^2\left\{\tilde{\mathbf{A}}\right\} = \sigma^2 \cdot \sum_{k=1}^{p} G_k^2 \qquad /1\text{-}10/$$

Uwzględniając /1-9/ w /1-2/ otrzymujemy, że:

$$E\left\{\tilde{\mathbf{A}}\right\} = \bar{A} - \bar{R}_p \qquad /1\text{-}11/$$

a więc wyżej określona punktowa aproksymata jest obciążonym estymatorem tłumienności pasmowej, przy czym to obciążenie /tzn. błąd niepoprawności aproksymaty/ wynosi $-\bar{R}_p$.

Przy każdej ustalonej liczbie p punktów aproksymacji minimalizacja wielkości określonej wzorem /1-10/ zachodzi przy równości współczynników wagowych, tzn. gdy jest spełniony warunek:

$$\bigwedge_{k=1,\dots,p} G_k = \frac{1}{p} \qquad /1\text{-}12/$$

W tym przypadku wariancja, najmniejsza w zbiorze wszystkich możliwych p-punktowych aproksymat, jest równa:

$$\min D^2\left\{\tilde{\mathbf{A}}\right\} = \frac{\sigma^2}{p} \qquad /1\text{-}13/$$

Każdą p - punktową aproksymatę tłumienności pasmowej, tworzoną przy ustalonych częstotliwościach $f_1,\dots,f_p$ wyznaczania tłumienności punktowych czwórnika, można scharakteryzować efektywnością określoną jako stosunek:

$$e_p = \frac{\min D^2\{\tilde{\mathbf{A}}\}}{D^2\{\tilde{\mathbf{A}}\}} = \frac{1}{p\sum\limits_{k=1}^{p} G_k^2} \qquad /1\text{-}14/$$

przy czym wielkość ta przyjmuje wartości z przedziału $[0,1]$.

W niniejszym referacie przedstawimy metody wyznaczania wartości optymalnych częstotliwości $\overset{\circ}{f}_1,\ldots,\overset{\circ}{f}_p$ przy których uzyskuję się maksymalną efektywność p-punktowych aproksymat tłumienności pasmowej.

Prezentacja tych metod zostanie poprzedzona przedstawieniem metody określania wartości współczynników wagowych $G_1,\ldots,G_p$ aproksymat przy założonych częstotliwościach wyznaczania tłumienności punktowych.

2. TWORZENIE APROKSYMAT PRZY ZAŁOŻONYCH CZĘSTOTLIWOŚCIACH WYZNACZANIA TŁUMIENNOŚCI PUNKTOWYCH

2.1. Ogólne wzory określające błąd niepoprawności aproksymat oraz ich współczynniki wagowe

W przypadku założenia określonych częstotliwości $f_1,\ldots,f_p$ wyznaczania tłumienności punktowych górny kres modułu błędu niepoprawności jest określony wzorem /1-6/, a występująca w tym wzorze wielkość J_p jest określona równością /1-7/.

Należy zwrócić uwagę, że występujący w tym ostatnim wzorze pod znakiem całki iloczyn można przedstawić w postaci wielomianu, a mianowicie:

$$\prod_{j=1}^{p} (f-f_j) = \sum_{l=0}^{p} a_l \cdot f^{p-l} \qquad /2\text{-}1/$$

gdzie współczynniki a_l /z indeksami $l = 0,1,\ldots,p$/ równe:

$$a_l = (-1)^l \sum_{\binom{p}{l}} \prod_{\substack{i=1 \\ j_i=1,\ldots,p}}^{l} f_{j_i} \qquad /2\text{-}2/$$

są sumami $\binom{p}{l}$ iloczynów, stanowiących kombinacje bez powtórzeń l elementów z p elementowego zbioru $\{f_j\}$, gdzie $j = 1,\ldots,p$, przy czym:

$$\left.\begin{array}{l} a_o = 1 \\ a_1 = -\sum\limits_{j=1}^{p} f_j \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_p = (-1)^p \prod\limits_{j=1}^{p} f_j \end{array}\right\} \qquad /2\text{-}3/$$

Podstawiając /2-1/ do /1-7/ i dokonując operacji całkowania otrzymujemy związek:

$$J_p = \sum_{l=0}^{p} a_l \cdot m_{p-l} \qquad /2\text{-}4/$$

gdzie

$$m_r = \int_{f_d}^{f_g} f^r\, g(f)\, df \qquad /2\text{-}5/$$

jest momentem zwyczajnym r-tego rzędu rozkładu wagi w pasmie przesyłowym, przy czym występujące we wzorze /2-4/ wartości $r = 0,1,\ldots,p$. Warto przy tym przypomnieć, że:

$$m_o = 1 \qquad /2\text{-}6/$$

Podstawiając /2-4/ do /1-6/ otrzymujemy ostateczny wzór na górny kres modułu błędu niepoprawności p-punktowej aproksymaty tłumienności pasmowej:

$$\left|\bar{R}_p\right| \leq \frac{M_p}{p!} \cdot \left|\sum_{l=0}^{p} a_l \cdot m_{p-l}\right| \qquad /2\text{-}7/$$

Przy założeniu określonych częstotliwości $f_1,\ldots,f_p$ wyznaczania tłumienności punktowych współczynniki wagowe aproksymat tłumienności pasmowej są określone wzorem /1-4/, a występująca w tym wzorze wielkość $J_{p/k}$ - wzorem /1-5/.

Należy zwrócić uwagę, że występujący w tym ostatnim wzorze pod znakiem całki iloczyn można przedstawić w postaci wielomianu, a mianowicie:

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} (f-f_j) = \sum_{l=0}^{p-1} a_{l/k} \cdot f^{p-l-1} \qquad /2\text{-}8/$$

gdzie współczynniki $a_{l/k}$ /z indeksami $l = 0,1,\ldots,p-1$/ równe:

$$a_{l/k} = (-1)^l \sum_{\binom{p-1}{l}} \prod_{\substack{i=1\\ j_i\neq k\\ j_i=1,\ldots,p}}^{l} f_{j_i} \qquad /2\text{-}9/$$

są sumami $\binom{p-1}{l}$ iloczynów, stanowiących kombinacje bez powtórzeń l elementów z /p-1/ elementowego zbioru $\{f_j\}$, gdzie $j \neq k$, przyjmując wszystkie pozostałe wartości $j = 1,\ldots,p$, przy czym:

$$\left.\begin{aligned} a_{o/k} &= 1 \\ a_{1/k} &= -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} f_j \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{p-1/k} &= (-1)^{p-1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} f_j \end{aligned}\right\} \qquad /2\text{-}10/$$

Podstawiając /2-8/ do /1-5/ i dokonując operacji całkowania otrzymujemy związek:

$$J_{p/k} = \sum_{l=0}^{p-1} a_{l/k} \cdot m_{p-l-1} \qquad /2\text{-}11/$$

gdzie m_r jest momentem zwyczajnym rozkładu wagi, określonym wzorem /2-5/, przy czym występujące we wzorze /2-11/ wartości $r = 0,1,\ldots,p-1$.

Występujący w mianowniku prawej strony wzoru /1-4/ iloczyn jest wartością wielomianu /2-8/ w punkcie $f = f_k$, tzn.

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} (f_k - f_j) = \sum_{l=0}^{p-1} a_{l/k} \cdot f_k^{p-l-1} \qquad /2\text{-}12/$$

gdzie współczynniki $a_{l/k}$ są określone wzorem /2-9/.

Podstawiając /2-11/ i /2-12/ do /1-4/ otrzymujemy ostateczny wzór na współczynniki wagowe p-punktowej aproksymaty tłumienności pasmowej:

$$G_k = \frac{\sum_{l=0}^{p-1} a_{l/k} \cdot m_{p-l-1}}{\sum_{l=0}^{p-1} a_{l/k} \cdot f_k^{p-l-1}} \qquad /2\text{-}13/$$

2.2. Przykładowe wzory szczególne dla małej liczby punktów aproksymacji

Dla dwóch punktów aproksymacji /tzn. $p = 2$/, przy założonych częstotliwościach f_1, f_2 otrzymujemy następujące wyrażenia na współczynniki wagowe:

$$G_1 = \frac{m_1 - f_2}{f_1 - f_2} \qquad /2\text{-}14/$$

oraz

$$G_2 = \frac{m_1 - f_1}{f_2 - f_1}$$

Efektywność takiej aproksymaty wynosi:

$$e_2 = \frac{1}{2/G_1^2 + G_2^2/} \qquad /2\text{-}15/$$

natomiast moduł błędu niepoprawności 2-punktowej aproksymaty tłumienności pasmowej jest określony nierównością:

$$\left|\bar{R}_2\right| \leqslant \frac{M_2}{2} \cdot \left| m_2 - m_1(f_1+f_2) + f_1 f_2 \right| \qquad /2\text{-}16/$$

gdzie M_2 jest maksymalną wartością modułu drugiej pochodnej częstotliwościowej charakterystyki czwórnika w pasmie przesyłowym.

Dla trzech punktów aproksymacji /tzn. $p = 3$/, przy założonych częstotliwościach f_1, f_2, f_3 otrzymujemy następujące wyrażenia na współczynniki wagowe:

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= \frac{m_2 - m_1/f_2+f_3/ + f_2 f_3}{f_1^2 - f_1/f_2+f_3/ + f_2 f_3} \\ G_2 &= \frac{m_2 - m_1/f_1+f_3/ + f_1 f_3}{f_2^2 - f_2/f_1+f_3/ + f_1 f_3} \\ G_3 &= \frac{m_2 - m_1/f_1+f_2/ + f_1 f_2}{f_3^2 - f_3/f_1+f_2/ + f_1 f_2} \end{aligned}\right\} \qquad /2\text{-}17/$$

Efektywność takiej aproksymaty wynosi:

$$e_3 = \frac{1}{3/G_1^2 + G_2^2 + G_3^2/} \qquad /2\text{-}18/$$

natomiast moduł błędu niepoprawności 3-punktowej aproksymaty tłumienności pasmowej jest określony nierównością:

$$\left|\bar{R}_3\right| \leqslant \frac{M_3}{6} \cdot \left| m_3 - m_2/f_1+f_2+f_3/ + m_1/f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3/ - f_1 f_2 f_3 \right| \qquad /2\text{-}19/$$

gdzie M_3 jest maksymalną wartością modułu trzeciej pochodnej częstotliwościowej charakterystyki tłumienności czwórnika w pasmie przesyłowym.

3. TWORZENIE APROKSYMAT BEZWZGLĘDNIE NAJEFEKTYWNIEJSZYCH /O DOKŁADNIE JEDNAKOWYCH WSPÓŁCZYNNIKACH WAGOWYCH/

3.1. Ogólna metoda tworzenia aproksymat o równych wagach

Jak wykazano w pkt 4 referatu [4], uzyskanie aproksymat o efektywności równej jedności wymaga stosowania optymalnych częstotliwości $\overset{\circ}{f}_1,\ldots\overset{\circ}{f}_p$ wyznaczania tłumienności punktowych, przy czym wartości tych częstotliwości są pierwiastkami układu p równań o postaci:

$$\sum_{k=1}^{p} f_k^r = p \cdot m_r \qquad /3\text{-}1/$$

gdzie $r = 1,\ldots,p$, zaś m_r jest momentem zwyczajnym rzędu r rozkładu wagi, określonym wzorem /2-5/.

Taki układ równań posiada identyczne pierwiastki jak równanie algebraiczne p-tego stopnia o postaci:

$$\sum_{s=0}^{p} \lambda_s \cdot f^{p-s} = 0 \qquad /3\text{-}2/$$

którego współczynniki λ_s wyznacza się rekurencyjnie na podstawie następujących zależności /tzw. wzorów Newtona/:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_o &= 1\\
\lambda_1 &= -p\cdot m_1\\
\lambda_2 &= -\frac{p}{2}\,/m_2+\lambda_1\cdot m_1/\\
\lambda_3 &= -\frac{p}{3}\,/m_3+\lambda_1\cdot m_2+\lambda_2\cdot m_1/\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda_s &= -\frac{p}{s}\,/m_s+\lambda_1\cdot m_{s-1}+\ldots+\lambda_{s-1}\cdot m_1/\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda_p &= -\,/m_p+\lambda_1\cdot m_{p-1}+\ldots+\lambda_{p-1}\cdot m_1/
\end{aligned}\right\} \qquad /3\text{-}3/$$

W przypadku gdy $p \leq 4$ - istnieją algebraiczne rozwiązania równania /3-2/; rozwiązania te zostały podane w punkcie 3.2 niniejszego referatu.

Gdy liczba punktów aproksymacji $p \geq 5$ - zachodzi potrzeba stosowania iteracyjnych metod rozwiązywania równania /3-2/; metody takie zwięźle przedstawiono np. w rozdz. 8 podręcznika [5].

3.2. Algebraiczna metoda tworzenia aproksymat o równych wagach

Wprowadźmy następujące oznaczenia parametrów rozkładu wagi w pasmie przesyłowym /patrz np. rozdz. 15 podręcznika [1]/:

- dla wartości oczekiwanej:

$$\eta = m_1 \qquad /3\text{-}4/$$

- dla odchylenia standardowego:

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} \qquad /3\text{-}5/$$

- dla współczynnika asymetrii:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \qquad /3\text{-}6/$$

- dla współczynnika ekscesu:

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \qquad /3\text{-}7/$$

gdzie:

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 \qquad /3\text{-}8/$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^2 \qquad /3\text{-}9/$$

oraz

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4 \qquad /3\text{-}10/$$

są momentami centralnymi rzędów: drugiego, trzeciego oraz czwartego, zaś m_r są momentami zwyczajnymi rzędu r-tego, określonymi wzorem /2-5/.

W przypadku jednopunktowej aproksymacji tłumienności pasmowej, tzn. przy $p = 1$, równanie /3-2/ przyjmuje postać:

$$f - \eta = 0 \qquad /3\text{-}11/$$

i zawsze posiada jeden pierwiastek rzeczywisty:

$$f_1 = \eta \tag{3-12}$$

określający optymalną częstotliwość wyznaczania tłumienności punktowej przy $p = 1$.

W przypadku dwupunktowej aproksymacji tłumienności pasmowej, tzn. przy $p = 2$, równanie /3-2/ przyjmuje postać:

$$/f - \eta/^2 - \sigma^2 = 0 \tag{3-13}$$

i zawsze posiada dwa pierwiastki rzeczywiste:

$$f_{1,2} = \eta \mp \sigma \tag{3-14}$$

określające optymalne częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych przy $p = 2$.

W przypadku trójpunktowej aproksymacji tłumienności pasmowej, tzn. przy $p = 3$, równanie /3-2/ przyjmuje postać:

$$/f-\eta/^3 - \frac{3}{2}/f-\eta/\sigma^2 - \gamma_1\sigma^3 = 0 \tag{3-15}$$

i posiada trzy pierwiastki rzeczywiste pod warunkiem, że

$$|\gamma_1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3-16}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\beta = \arccos \gamma_1\sqrt{2} \tag{3-17}$$

oraz:

$$\operatorname{sgn}\beta = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{dla } \beta < 0 \\ +1 & \text{dla } \beta \geqslant 0 \end{array} \right\} \tag{3-18}$$

pierwiastki te można wyrazić w postaci:

$$f_k = \eta + \sigma\sqrt{2}\cos\frac{\beta + 2/k-3/\pi \operatorname{sgn}\beta}{3} \tag{3-19}$$

/gdzie $k = 1,2,3$/, określającej optymalne częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych przy $p = 3$.

W przypadku czteropunktowej aproksymacji tłumienności pasmowej, tzn. przy $p = 4$, równanie /3-2/ przyjmuje postać:

$$\left.\begin{aligned} &/f-\eta/^4 - 2\sigma^2/f-\eta/^2 + \\ &\quad - \left[8\eta/\eta^2+\sigma^2/ - \tfrac{4}{3}\gamma_1\sigma^3\right]/f-\eta/ + \\ &\quad - \left[8\eta^2/\eta^2+\sigma^2/ - /1+\gamma_2/\sigma^4\right] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad /3\text{-}20/$$

i posiada cztery pierwiastki rzeczywiste pod warunkiem, że:

$$0 < w < 1 \qquad /3\text{-}21/$$

gdzie

$$w = 2 + \gamma_2 - \frac{4\eta}{3\sigma}\gamma_1 \qquad /3\text{-}22/$$

jest wyróżnikiem równania /3-20/.

Pierwiastki te można wyrazić w postaci:

$$f_k = \eta \mp \sigma\sqrt{1 \mp \sqrt{w}} \qquad /3\text{-}23/$$

/gdzie $k = 1,2,3,4$/, określającej optymalne częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych przy $p = 4$.

Wyżej sformułowano warunki konieczne istnienia aproksymat o efektywności równej jedności; ponadto muszą być spełnione warunki dostateczne określone wzorem /1-3/. Wprowadzając oznaczenie:

$$\delta = \min\left\{\eta - f_d;\ f_g - \eta\right\} \qquad /3\text{-}24/$$

można łatwo wykazać, że zachodzą następujące warunki dostateczne istnienia bezwzględnie najefektywniejszych aproksymat dwupunktowych:

$$\sigma \leqslant \delta \qquad /3\text{-}25/$$

trójpunktowych:

$$\sigma \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{2}\cos\frac{\beta}{3}} \qquad /3\text{-}26/$$

oraz czteropunktowych:

$$\sigma \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{1+\sqrt{w}}} \qquad /3\text{-}27/$$

4. TWORZENIE APROKSYMAT WZGLĘDNIE NAJEFEKTYWNIEJSZYCH /O WSPÓŁCZYNNIKACH WAGOWYCH PRAWIE JEDNAKOWYCH/

Określona wzorem /1-14/ efektywność p-punktowej aproksymaty tłumienności pasmowej jest ciągłą i różniczkowalną funkcją p argumentów:

$$e_p \equiv e_p\,/f_1,\ldots,f_p/ \qquad /4\text{-}1/$$

Jak to wynika z pkt. 3 referatu, aproksymaty o efektywności równej jedności istnieją zawsze dla liczby punktów aproksymacji $p = 1$, natomiast dla $p \geqslant 2$ istnienie takich aproksymat jest uwarunkowane parametrami rozkładu wagi rozważanego pasma przesyłowego.

Jeżeli przy ustalonej funkcji wagi równanie /3-2/ nie posiada p pierwiastków rzeczywistych - zachodzi konieczność poszukiwania optymalnych częstotliwości $\overset{o}{f}_1,\ldots,\overset{o}{f}_p$ wyznaczania tłumienności punktowych poprzez maksymalizację efektywności wyrażonej wzorem /4-1/.

Efektywność e_p jest zazwyczaj wielomodalną funkcją argumentów $f_1,\ldots,f_p$, tzn. posiada wiele ekstremów. Poszukiwanie optymalnych częstotliwości $\overset{o}{f}_1,\ldots,\overset{o}{f}_p$ polega zatem na znalezieniu globalnego maksimum efektywności spośród wszystkich istniejących maksimów lokalnych funkcji /4-1/. Należy zwrócić uwagę, że maksima lokalne efektywności mogą być zarówno silne /tzn. jednopunktowe/ jak i słabe /tzn. obszarowe/. Maksimum lokalne funkcji wieloargumentowej może występować w każdym jej punkcie stacjonarnym:

$$\vec{f} \equiv /\overset{x}{f}_1,\ldots,\overset{x}{f}_p/ \qquad /4\text{-}2/$$

tzn. w punkcie, w którym występuje zerowanie się gradientu tej funkcji. W przypadku efektywności warunek konieczny występowania maksimum w punkcie określonym wzorem /4-2/ ma zatem postać:

$$\left(\nabla e_p\right)_{\vec{f}} = \vec{0} \qquad /4\text{-}3/$$

Zerowanie się gradientu efektywności zachodzi wówczas, gdy zerują się wszystkie składowe tego wektora, tzn.:

$$\bigwedge_{j=1,\dots,p} \left(\frac{\partial e_p}{\partial f_j}\right)_{\vec{f}} = 0 \qquad /4\text{-}4/$$

Ponieważ efektywność p-punktowej aproksymaty tłumienności pasmowej jest określona wzorem /1-4/, więc jej pochodne cząstkowe wynoszą:

$$\bigwedge_{j=1,\dots,p} \quad \frac{\partial e_p}{\partial f_j} = - \frac{2\sum\limits_{k=1}^{p} G_k \cdot \frac{\partial G_k}{\partial f_j}}{p\left(\sum\limits_{k=1}^{p} G_k^2\right)^2} \qquad /4\text{-}5/$$

Ze względu na nierówność:

$$\frac{-2}{p\left(\sum\limits_{k=1}^{p} G_k^2\right)^2} \neq 0 \qquad /4\text{-}6/$$

warunek konieczny występowania maksimum efektywności sprowadza się do układu p równań o postaci:

$$\sum_{k=1}^{p} G_k \cdot \frac{\partial G_k}{\partial f_j} = 0 \qquad /4\text{-}7/$$

dla $j = 1,\dots,p$.

Warunkiem dostatecznym istnienia silnego maksimum funkcji wieloargumentowej w jej punkcie stacjonarnym /4-2/ jest ujemna określoność hesjanu tej funkcji w rozważanym punkcie[x/].

Hesjan efektywności p-punktowej aproksymaty tłumienności pasmowej jest macierzą symetryczną o postaci:

[x/] Dla słabego maksimum funkcji wystarczy ujemna półokreśloność tego hesjanu.

$$\nabla^2_{e_p} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial e_p^2}{\partial f_1^2} & \dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_1 \cdot \partial f_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_1 \cdot \partial f_p} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_2 \cdot \partial f_1} & \dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_2^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_2 \cdot \partial f_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\[2ex] \dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_p \cdot \partial f_1} & \dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_p \cdot \partial f_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_p^2} \end{bmatrix} \qquad /4\text{-}8/$$

Macierz ta jest ujemnie określona w punkcie $\bar{f}$, gdy dla $j = 1,\ldots,p$ są spełnione warunki:

$$/-1/^j \, \Delta_j /\bar{f}/ > 0 \qquad /4\text{-}9/$$

gdzie $\Delta_j/\bar{f}/$ jest j-tym podwyznacznikiem głównym hesjanu /4-8/ określonym w punkcie $\bar{f}$. Podwyznaczniki te są zdefiniowane następująco:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1(\bar{f}) &\equiv \left(\frac{\partial^2 e_p}{\partial f_1^2}\right)_{\bar{f}} \\ \Delta_2(\bar{f}) &\equiv \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_1^2}\right)_{\bar{f}} & \left(\dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_1 \cdot \partial f_2}\right)_{\bar{f}} \\[3ex] \left(\dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_1 \cdot \partial f_2}\right)_{\bar{f}} & \left(\dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_1^2}\right)_{\bar{f}} \end{vmatrix} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad /4\text{-}10/$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_p(\vec{f}) \equiv \left|\begin{matrix} \left(\dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_1^2}\right)_{\vec{f}} & \cdots & \left(\dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_1 \cdot \partial f_p}\right)_{\vec{f}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_p \cdot \partial f_1}\right)_{\vec{f}} & \cdots & \left(\dfrac{\partial^2 e_p}{\partial f_p^2}\right)_{\vec{f}} \end{matrix}\right| \qquad /4\text{-}10/$$

Biorąc pod uwagę, że pierwsze pochodne cząstkowe efektywności są określone wzorem /4-5/, uzyskujemy następującą postać drugich pochodnych cząstkowych efektywności p-punktowych aproksymat tłumienności pasmowej:

$$\bigwedge_{i,j=1,\dots p} \quad \frac{\partial^2 e_p}{\partial f_j \cdot \partial f_i} = \frac{8\left(\sum\limits_{k=1}^{p} G_k \cdot \dfrac{\partial G_k}{\partial f_j}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{p} G_k \cdot \dfrac{\partial G_k}{\partial f_i}\right)}{p\left(\sum\limits_{k=1}^{p} G_k^2\right)^3} + \qquad /4\text{-}11/$$

$$- \frac{2\sum\limits_{k=1}^{p}\left(\dfrac{\partial G_k}{\partial f_j} \cdot \dfrac{\partial G_k}{\partial f_i} + G_k \cdot \dfrac{\partial^2 G_k}{\partial f_j \cdot \partial f_i}\right)}{p\sum\limits_{k=1}^{p} G_k^2}$$

W szczególnym przypadku gdy $i = j$, te pochodne cząstkowe sprowadzają się do postaci:

$$\bigwedge_{j=1,..,p} \quad \frac{\partial^2 e_p}{\partial f_j^2} = \frac{8\left(\sum_{k=1}^{p} G_k \cdot \frac{\partial G_k}{\partial f_j}\right)^2}{p\left(\sum_{k=1}^{p} G_k^2\right)^3} + \qquad /4\text{-}12/$$

$$- \frac{2\sum_{k=1}^{p}\left[\left(\frac{\partial G_k}{\partial f_j}\right)^2 + G_k \cdot \frac{\partial^2 G_k}{\partial f_j^2}\right]}{p\sum_{k=1}^{p} G_k^2} .$$

Ze względu na sk plikowanie procesu poszukiwania częstotliwości maksymalizujących efektywność aproksymat tłumienności pasmowej, proces taki można zrealizować wyłącznie elektroniczną techniką obliczeniową opartą na konwencjonalnych metodach optymalizacji; metody te przedstawiono np. w podręcznikach [2] i [6].

Warto zwrócić uwagę na ostatnią fazę procesu poszukiwania częstotliwości maksymalizujących efektywność aproksymat tłumienności pasmowej, fazę zależną od rodzaju występującego globalnego maksimum efektywności.

W przypadku gdy występuje silne maksimum efektywności, proces poszukiwania optymalnych częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych bezpośrednio prowadzi do jednoznacznego określenia wartości wektora częstotliwości: $\overset{o}{f}_1,\dots,\overset{o}{f}_p$.

Natomiast w przypadku gdy występuje słabe maksimum efektywności, proces poszukiwania optymalnych częstotliwości jest bardziej skomplikowany, a to dlatego, że maksimum słabe występuje w pewnym ściśle określonym obszarze p-wymiarowej przestrzeni argumentów $f_1,\dots,f_p$ /a nie w jednym punkcie tej przestrzeni - tak, jak to miało miejsce przy występowaniu maksimum silnego/. Dla uzyskania jednoznacznego określenia wartości wektora częstotliwości $\overset{o}{f}_1,\dots,\overset{o}{f}_p$ w rozważanym przypadku zachodzi konieczność wstępnego założenia wartości jednej /patrz [7]/ z optymalizowanych częstotliwości, przy czym ta założona wartość musi leżeć wewnątrz pewnego dopuszczalnego przedziału, którego granice są określone obszarem występującego słabego maksimum efektywności.

5. ZAKOŃCZENIE

W pierwszej części referatu wyprowadzono wzory określające współczynniki wagowe punktowych aproksymat tłumienności pasmowej czwórnika, a także błąd niepoprawności tych aproksymat, w zależności od momentów zwyczajnych rozkładu wagi w paśmie przesyłowym oraz od częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych rozważanego czwórnika.

W drugiej części referatu podano metodę określania optymalnych częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych czwórnika, tworzących bezwzględnie najefektywniejsze punktowe aproksymaty tłumienności pasmowej /o efektywności równej jedności/. Podano wzory umożliwiające określenie tych optymalnych częstotliwości w zależności od parametrów rozkładu wagi w paśmie przesyłowym. Wykazano, że przy liczbie punktów aproksymacji $p \geqslant 2$ istnieją określone warunki dotyczące parametrów rozkładu wagi, przy spełnieniu których można utworzyć bezwzględnie najefektywniejsze punktowe aproksymaty tłumienności pasmowej. Warunki te sprecyzowano tylko dla liczby punktów aproksymacji $p = 2,3$ oraz 4, przy których istnieje algebraiczna metoda określania optymalnych częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych. Otwartym problemem pozostaje sprecyzowanie warunków koniecznych i dostatecznych istnienia bezwzględnie najefektywniejszych aproksymat tłumienności pasmowej przy liczbie punktów aproksymacji $p \geqslant 5$.

Ponieważ przy liczbie punktów aproksymacji $p \geqslant 2$ nie zawsze są spełnione warunki istnienia aproksymat o efektywności równej jedności - w trzeciej części referatu sprecyzowano warunki maksymalizacji efektywności punktowych aproksymat tłumienności pasmowej. Stwierdzono, że proces poszukiwania częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych przy których zachodzi maksymalizacja efektywności aproksymat tłumienności pasmowej jest na tyle skomplikowany, iż jego realizacja wymaga stosowania wyłącznie elektronicznej techniki obliczeniowej.

Autor postuluje opracowanie procedury określania częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych maksymalizującej efektywność aproksymat tłumienności pasmowej, a także odpowiedniego programu obliczeń na EMC.

WYKAZ LITERATURY

1. Cramer H.: Metody matematyczne w statystyce. PWN, Warszawa 1958.
2. Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A.: Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji. PWN, Warszawa 1980.
3. Kowalski Z.: Pasmowe tłumienności czwórników i ortotelefoniczna tłumienność odniesienia. Referaty Problemowe Ił, z. 31, 1980.
4. Kowalski Z.: Zasady określania tłumienności pasmowej na podstawie danych punktowych. Referaty Problemowe Ił, z. 36, 1980.
5. Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej. PWN, Warszawa 1975.
6. Seidler J., Badach A., Molisz W.: Metody rozwiązywania zadań optymalizacji. WNT, Warszawa 1980.

w druku:

7. Kowalski Z.: Metoda wyznaczania najefektywniejszych 3-punktowych aproksymat tłumienności pasmowej. Referaty Problemowe Ił, z. 48, 1981.

D o t y c h c z a s   u k a z a ł y   s i ę :

1. Białobrzeski R., Sońta S.: Zastosowanie testu chi kwadrat Pearsona do weryfikacji hipotezy statystycznej, na podstawie empirycznej gęstości prawdopodobieństwa. Grudzień 1977.
2. Blinkiewicz A., Mędrzycki B., Hutnik M., Sambierski R.: Zastosowanie pamięci kasetowej PK-1 do rejestracji danych w systemie komutacyjnym E-10. Styczeń 1978.
3. Orłowski A.: Optymalizacja układu ogranicznika dynamiki zwłaszcza dla radiofonii krótkofalowej. Luty 1978.
4. Frączek K.: Zasady opracowywania wymagań techniczno-eksploatacyjnych na urządzenia pomiarowe w resorcie łączności. Marzec 1978.
5. Białobrzeski R., Dudziewicz J.: Minimalna częstość próbkowania sygnału losowego przy pomiarze jego mocy średniej. Marzec 1978.
6. Lewandowski W.: Wprowadzenie komutacji teledacyjnych kanałów cyfrowych w powszechnej telefonicznej sieci komutacyjnej z centralami elektronicznymi E-10. Kwiecień 1978.
7. Dudziewicz J.: Ogólne wytyczne w sprawie prowadzenia i dokumentowania prac naukowo-badawczych wykonywanych w Instytucie Łączności. Kwiecień 1978.
8. Stagrowski A.: Metoda detekcji i pomiaru impulsów o maksymalnych i minimalnych czasach trwania w ciągu. Maj 1978.
9. Chamski J.: System CTI-B dla maszyny cyfrowej R-10. Maj 1978.
10. Puchalski E.: Kompensator napięcia stałego stosowany w układach do sprawdzania przetworników termoelektrycznych i mikropotencjometrów. Czerwiec 1978.
11. Kozłowski A.: Elektroniczny sygnalizator przywołania abonenta w aparacie telefonicznym CB. Wrzesień 1978.
12. Stasierski L.: Wyładowania łukowe w.cz. na izolatorach odciągów pionowych anten radiofonicznych. Październik 1978.
13. Walaszek S.: Zastosowanie uogólnionego rozwiązania układu o trzech stanach do analizy niezawodności. Styczeń 1979.
14. Sońta S.: Aparatura automatyczna badań sieci łączy międzymiastowych systemu ABA-3. Luty 1979.

15. Godlewski P.: Język programowania badań w systemie ABA2 i ABA3. Marzec 1979.

16. Waśniewski A.: Kombinatoryczne aspekty planowania badań sieci telekomunikacyjnej za pomocą systemu ABA-3. Kwiecień 1979.

17. Brennek L., Lebiedziuk B.: System edycji, przechowywania i translacji programów w języku SAWIK dla minikomputera MERA 305. Maj 1979.

18. Godlewski P.: Aparatura sterująca systemu badaniowego ABA-3 - architektura urządzenia. Czerwiec 1979.

19. Chamski J.: Centrum eksploatacji technicznej w systemie E 10. Lipiec 1979.

20. Porada M.: Komunikat o badaniach zakłóceń impulsowych w łączach telefonicznych. Sierpień 1979.

21. Sońta S.: Generacja sygnałów losowych niezależnych obciążających kanały telefoniczne. Wrzesień 1979.

22. Karwowska-Lamparska A.: Koncepcja systemu WIDEOTEKS. Październik 1979.

23. Kowalska J.: Próba eksploatacyjna automatycznej aparatury badaniowej ABA-2 - analiza wyników, wnioski. Listopad 1979.

24. Tyrowicz M.: System zdalnej rejestracji kontroli obiektów specjalnych - REKO - . Grudzień 1979.

25. Frydrych Z.: Uwagi o wymiarowaniu wiązek łączy międzycentralowych. Styczeń 1980.

26. Frydrych Z.: O niezawodności sieci telekomunikacyjnej. Luty 1980.

27. Kisło M.: Automatyzacja stacjonarnych pomiarów propagacyjnych. Marzec 1980.

28. Mieszczanek J.: Analiza i projektowanie oscylatorów kwarcowych pracujących w układzie Pierce'a-Colpitts'a. Kwiecień 1980.

29. Frydrych Z.: Niektóre problemy projektowania dróg kolejnego wyboru. Maj 1980.

30. Laube J.: Wybrane metody projektowania cyfrowych zespołów funkcjonalnych na przykładzie projektu generatora połączeń telefonicznych. Czerwiec 1980.

31. Kowalski Z.: Pasmowe tłumienności czwórników i ortotelefoniczne tłumienności odniesienia. Lipiec 1980.

32. Proga I.: Analiza i ocena odgromników zagranicznych oraz niezbędnego do nich osprzętu na podstawie badań i obserwacji w warunkach eksploatacyjnych. Sierpień 1980.

33. Godlewski P., Zejdel A.: System automatycznej kontroli obecności i ruchu załogi AKOR. Wrzesień 1980.

34. Waśniewski A.: Problem minimalizacji czasu badania sieci w systemie ABA-3. Październik 1980.

35. Kuśmirek Z.: Impedancja wewnętrzna źródła i jej pomiar. Listopad 1980.

36. Kowalski Z.: Zasady określania tłumienności pasmowej na podstawie danych punktowych. Grudzień 1980.

37. Kowalski Z.: Punktowe aproksymaty tłumienności pasmowej przy równomiernej gęstości wagi. Styczeń 1981.

38. Frydrych Z.: Wykorzystanie sygnałów informacyjnych dla poprawy jakości załatwiania ruchu w sieci telefonicznej. Luty 1981.

39. Lech J.: Analiza możliwości szacowania średniej 1-minutowej oraz 5-sekundowej mocy szumów w kanale telefonicznym na podstawie wyników pomiarów średniej 375-milisekundowej. Marzec 1981.

40. Strużak R.: O optymalnym przydziale mocy i częstotliwości radiokomunikacyjnym stacjom nadawczym. Kwiecień 1981.

41. Kawecki A.: Określenie kumulatywnego rozkładu prawdopodobieństwa natężeń opadów atmosferycznych w Polsce dla potrzeb radiokomunikacji. Maj 1981.

42. Trechciński J.: Korzyści z wprowadzania cyfrowych centrów komutacyjnych do telefonicznych sieci strefowych. Czerwiec 1981.

43. Chamski J.: Metody badań oprogramowania użytkowego centrum eksploatacji technicznej w systemie komutacji elektronicznej E-10. Lipiec 1981.

44. Kotz F.: Problemy sterowania zapłonem tyrystorów w przekształtnikach wielofazowych. Sierpień 1981.

45. Flisek T., Klimczewska I.: Wpływ służby "zapamiętaj i przekaż" na wielkość generowanego i załatwionego ruchu w krajowej sieci telegraficznej. Wrzesień 1981.

46. Stankiewicz S.: Kalkulator - jednostka sterująca typu K77 automatycznego stanowiska pomiarowego. Październik 1981.