

Neper – jednostka miary układu SI?

Jerzy Dudziewicz

Przedstawiono tendencje panujące w Międzynarodowym Biurze Miar (BIPM - Bureau international des poids et mesures), dotyczące stosowania jednostek miar logarytmicznych nepera i bel. Szczególną uwagę zwrócono na propozycję uznania jednostki miary neper o wymiarze równym jednoźci jako pochodnej jednostki należącej do układu SI. Zagadnienie to zilustrowano klasycznymi modelami stosowanymi przy definiowaniu tej jednostki.

jednostki neper i bel

Wstęp

W tablicy 6 ostatnio wydanej broszury Międzynarodowego Układu Jednostek Miar (SI) [7] jednostki neper i bel umieszczono jako jednostki specjalne, spoza układu SI, lecz przyjęte do stosowania wraz z jednostkami SI w przypadkach wyrażania wartości wielkości logarytmicznych, takich jak na przykład: dekrement logarytmiczny albo poziom wielkości połowej lub poziomu mocy. Komitet Doradczy Jednostek Miar (CCU - Comité consultatif des unités) podczas swojej ostatniej sesji we wrześniu 1998 r. [1] zwrócił się z prośbą do Generalnej Konferencji Miar (CGPM - Conférence générale des poids et mesures) o uznanie nepera jako pochodnej jednostki miar układu SI, mając na uwadze spójność (w przeciwieństwie do bel) z podstawowymi jednostkami miar i innymi pochodnymi jednostkami miar układu SI.

Uwzględniając znaczenie tych jednostek - nepera i bel (decybel) - dla telekomunikacji, elektroniki oraz akustyki (elektroakustyki) poniżej przedstawiono rozważania związane z tymi problemami.

Modele stosowane przy definiowaniu jednostki neper

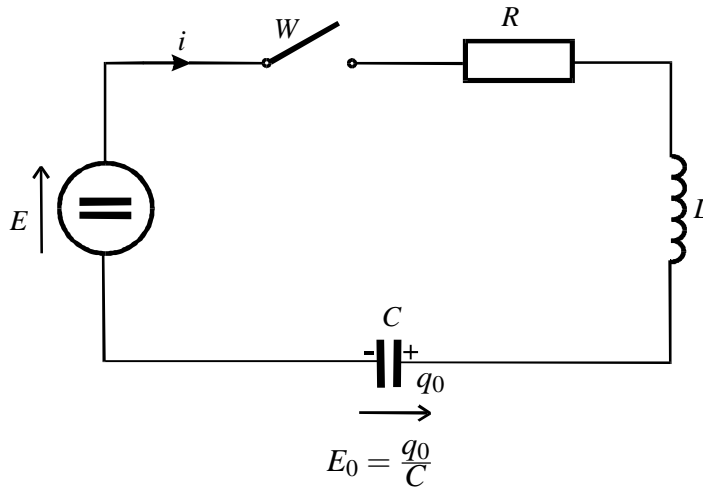
Gasnące drgania harmoniczne

Na rys. 1 pokazano prosty szeregowy obwód rezonansowy RLC, który zamknięto wyłącznikiem W w chwili $t = 0$. Jak wiadomo [3], po zamknięciu tego obwodu powstają gasnące drgania harmoniczne, jeśli dobroć tego obwodu $Q > 1/2$ (stan niedotłumienia). Dobroć określa się zależnością

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R}, \quad (1)$$

a pulsację rezonansową ω_0 , wyrażoną w radianach na sekundę (rad/s) wzorem:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2)$$



Rys. 1. Elementarny układ rezonansowy RLC, w którym powstają drgania gasnące prądu i

Na rys. 2 przedstawiono dla tego procesu przebieg prądu i przepływającego w obwodzie. Przebieg ten można opisać następującym wyrażeniem:

$$i = I_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right), \quad (3)$$

gdzie I_0 jest określone zależnością:

$$I_0 = \frac{E - E_0}{\omega_0 L \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}. \quad (4)$$

Stosunek dwóch wartości szczytowych odpowiadających kolejnym okresom wynosi (por. rys. 2)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)}{I_0 \exp\left[-\frac{\omega_0(t+T)}{2Q}\right]} = \exp\left(\frac{\omega_0 T}{2Q}\right), \quad (5)$$

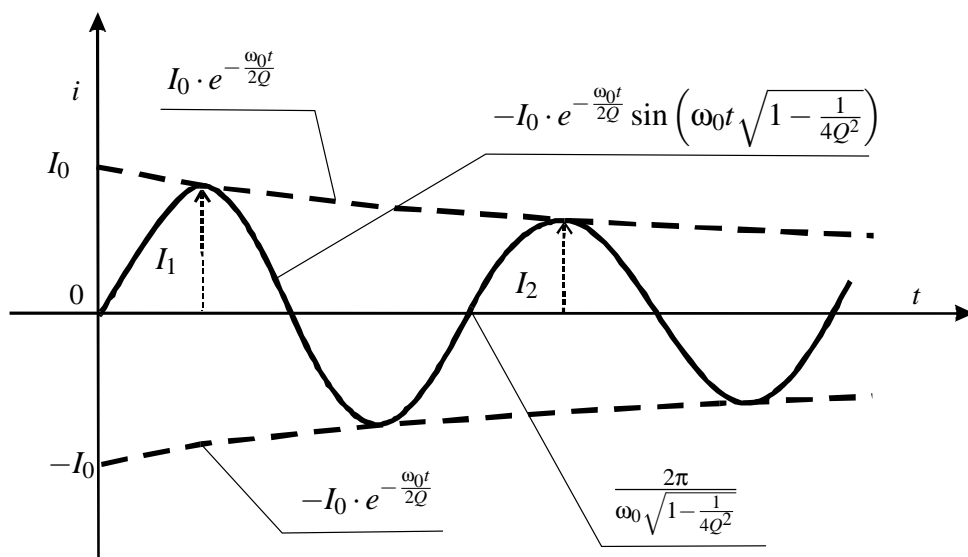
gdzie T oznacza okres drgań i wynosi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}. \quad (6)$$

Iloraz $\delta = \omega_0 / 2Q = R / 2L$ (por. wzory 1 i 2) nazywa się **współczynnikiem zanikania** i jest wyrażony w neperach na sekundę (Np/s). Wymiar tej wielkości jest równy s^{-1} , ponieważ wymiar nepera jest równy jeden (jednostka bezwymiarowa). Iloczyn $\Lambda = \delta T$ nazywa się **dekrementem logarytmicznym** i jest wyrażony w neperach (Np).

Biorąc pod uwagę wzór (5) można stwierdzić, że dekrement logarytmiczny

$$\Lambda = \ln \frac{I_1}{I_2} \quad (7)$$



Rys. 2. Przebieg drgań gasnących prądu i w układzie przedstawionym na rys. 1

jest logarytmiczną funkcją stosunku dwóch wielkości połowych, które w danym przypadku gasnących drgań własnych obwodu rezonansowego stanowią charakterystyczne wartości chwilowe prądu. Wynika stąd oczywisty wniosek, że jednostce 1 neper odpowiada stosunek wielkości połowych równy liczbie e , tzn. podstawie logarytmów naturalnych, czyli

$$1 \text{ neper} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = e. \quad (8)$$

Często zdarza się, że jest interesujący logarytmiczny stosunek wielkości mocowych (wielkości proporcjonalnych do mocy, energii itp.). Ze wzoru (7) wynika również, że

$$\Lambda = \frac{1}{2} \ln \frac{I_1^2}{I_2^2}, \quad (9)$$

a zatem w tym przypadku

$$1 \text{ neper} \Rightarrow \frac{I_1^2}{I_2^2} = e^2. \quad (10)$$

Wynika stąd więc, że jednostce 1 neper odpowiada stosunek mocy chwilowych, wydzielanych w oporniku R w dwóch kolejnych szczytach, równy e^2 .

W szczególności należy zwrócić uwagę na analogiczną rolę formalną radiana w wyrażeniu na składową urojoną częstotliwości zespolonej $s = -\delta \pm j\omega$, gdzie pulsacja $\omega = 2\pi/T$ jest wyrażona w radianach na sekundę, o wymiarze s^{-1} , z rolą nepera w wyrażeniu na składową rzeczywistą tej częstotliwości

zespolonej (zwaną niekiedy częstotliwością nepera), wyrażoną w neperach na sekundę, o wymiarze s^{-1} . Pulsacja ta w rozpatrywanym przykładzie wynosi

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \quad (11)$$

Poziom bezwzględny

W elektryce (zwłaszcza w telekomunikacji) oraz akustyce powszechnie jest stosowane pojęcie poziomu (bezwzględnego) wielkości mocowej lub polowej, który może być wyrażany w neperach. Na przykład zakładając, że między pewnymi węzłami sieci elektrycznej istnieje napięcie U (może to być np. wartość skuteczna przebiegu sinusoidalnego), można mu przyporządkować wyrażony w neperach poziom napięcia p_u

$$p_u = \ln \frac{U}{U_o}, \quad (12)$$

gdzie U_o stanowi napięcie odniesienia o pewnej umownej wartości (np. 1 V lub $\sqrt{0,6}$ V - napięcie na rezystorze 600 Ω , w którym wydzielą się moc 1 mW). Jeżeli wielkością polową jest ciśnienie akustyczne, to wartością odniesienia bywa zazwyczaj ciśnienie $2 \cdot 10^{-5}$ Pa.

Jeżeli wprowadza się pojęcie poziomu mocy p , to zamiast wzoru (12) obowiązuje następujący wzór:

$$p = \frac{1}{2} \ln \frac{P}{P_o}, \quad (13)$$

gdzie P oznacza moc, której przyporządkowuje się odpowiedni poziom, a P_o - umowną wartość mocy odniesienia (np. 1 W albo 1 mW).

Tłumiennosc (wzmocnienie)

Typowym przypadkiem stosowania wielkości logarytmicznych jest miara tłumienności czwórnika (dwuwrotnika), rozumiana jako stosunek jego „wejścia” do „wyjścia” (por. rys. 3). Zakłada się, że przepływ energii następuje od wejścia do wyjścia. Najczęściej wielkościami wejściowymi i wyjściowymi są: moc (pozorna), napięcie lub prąd (może być także natężenie pola elektrycznego).

Analogicznie do wzoru (13) tłumienność mocy A wyrażona w neperach jest równa:

$$A = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2}, \quad (14)$$

gdzie P_1 oznacza moc wejściową, a P_2 - moc wyjściową czwórnika.

W podobny sposób dla wielkości polowych, na przykład napięć, można analogicznie do wzoru (12) przedstawić wyrażoną w neperach tłumienność napięć A_u jako

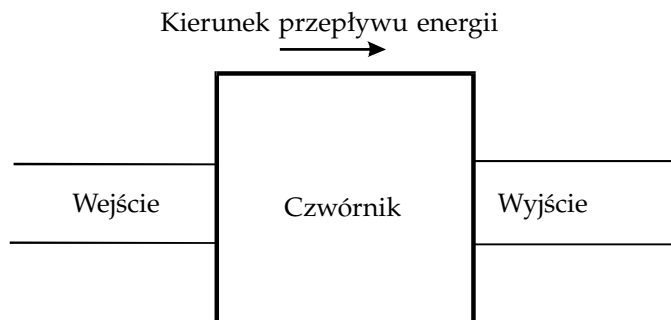
$$A_u = \ln \frac{U_1}{U_2}. \quad (15)$$

Jeżeli wartości tłumienności są ujemne, to mówi się o wzmocnieniu, jako wielkości przeciwnej do tłumienności.

W przypadku gdy czwórnik (rys. 3) jest układem o stałych równomiernie rozłożonych (linia długa), stosuje się pojęcie tłumienności jednostkowej, zwanej także współczynnikiem tłumienia α .

Jest to przyrost (nieskończenie mały) tłumienności ΔA odniesiony do przyrostu długości Δl wyrażony w neperach na metr:

$$\alpha = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta l} . \quad (16)$$



Rys. 3. Ilustracja przepływu energii z wejścia na wyjście czwornika

Jak wiadomo [3], współczynnik ten stanowi składową rzeczywistą tłumienności jednostkowej $\gamma = \alpha + j\beta$ (zwanej także stałą propagacji), która występuje w całości ogólnej równania różniczkowego opisującego stan ustalony w linii długiej jako

$$K_1 e^{-\gamma x} + K_2 e^{\gamma x} ,$$

gdzie: x - odległość od początku linii, β - przesuwność fazowa jednostkowa, zwana także stałą fazową.

Zalecenie Komitetu CCU w sprawie nepera i bela

Podczas 13. sesji Komitetu Doradczego Jednostek Miar sformułowano następujące zalecenie [1].

Zalecenie U 2 (1998)

Neper i bel

Komitet Doradczy Jednostek Miar,
biorąc pod uwagę, że

- logarytm naturalny jest stosowany do definiowania dekrementu logarytmicznego, poziomu wielkości połowej i poziomu wielkości mocowej w układzie wielkości, na którym jest oparty układ SI,
- wielkości i zależności między wielkościami, na których jest oparty układ SI, upraszczają się, gdy stosuje się logarytm naturalny,
- w szczególności dla wielkości zespolonych jedynym użytecznym logarytmem jest logarytm naturalny,
- wraz z zastosowaniem logarytmu naturalnego radian i neper wiążą się ze sobą, a więc obie te jednostki miary powinny mieć ten sam status w układzie SI,
- 20. Generalna Konferencja Miar (1995, Uchwała 8) podjęła decyzję, aby interpretować ówczesne jednostki miar, dodatkowe w układzie SI, tzn. radian i steradian, jako jednostki miar pochodne bezwymiarowe i w rezultacie wyeliminować klasę uzupełniających jednostek miar jako oddzielną klasę w układzie SI,

- Międzynarodowy Komitet Miar w broszurze na temat układu SI (1998, 7. wydanie) przyjął nazwę neper o symbolu Np., jako specjalną nazwę dla jednostki miary „jeden”, jednostki spójnej układu SI, w wyrażaniu wartości wielkości logarytmicznych, gdy stosuje się logarytm naturalny, a także nazwę bel, o symbolu B, jako praktyczną jednostkę miary dla wyrażania wartości takich wielkości, gdy stosuje się logarytm o podstawie dziesięć, i podkreślił wagę sprecyzowania poziomu odniesienia,
- zachodzi potrzeba uzupełnienia wewnętrznej spójności układu SI przez przyjęcie w sposób formalny specjalnej nazwy i symbolu dla jednostki miary „jeden” układu SI dla wyrażania wartości wielkości logarytmicznych, w takich dziedzinach jak na przykład akustyka i elektryka,

zaleca

- przyjęcie specjalnej nazwy neper o symbolu Np. dla jednostki miary „jeden”, jako jednostki pochodnej bezwymiarowej układu SI dla wyrażania wartości wielkości logarytmicznych, takich jak na przykład dekrement logarytmiczny, poziom wielkości połowej lub poziom mocy, gdy stosuje się logarytm naturalny,
- potwierdzenie decyzji Międzynarodowego Komitetu Miar o przyjęciu do stosowania wraz z Międzynarodowym Układem Jednostek Miar nazwy bel o symbolu B i jej podwielokrotności decybel (powszechnie stosowanej) o symbolu dB, że można je uważać za jednostki miary niespójne z układem SI, skoro stosuje się logarytm o podstawie dziesięć.

Wnioski

Zakładając, że kolejna Generalna Konferencja Miar przychyli się do wyżej przedstawionego zalecenia Komitetu Doradczego Jednostek Miar w sprawie nepera i decybel, można wyciągnąć następujące wnioski praktyczne, dotyczące stosowania obu tych jednostek w życiu codziennym, literaturze technicznej, a w szczególności w działalności naukowo-technicznej, w której są stosowane jednostki miary wielkości logarytmicznych.

1. We wszystkich przypadkach, w których są rozważane problemy teoretyczne dotyczące podstawowych dziedzin nauki, a w szczególności takie, w których jest stosowany formalny zapis matematyczny (np. równania, macierze itp.), zaleca się używanie jednostki neper ze względu na jej spójność z innymi jednostkami układu SI. Przy dzisiejszym poziomie techniki obliczeniowej sprawa trudności posługiwania się tablicami logarytmów naturalnych (jeden z dawnych motywów preferowania logarytmów dziesiętnych wobec logarytmów naturalnych) nie odgrywa już jakiegokolwiek roli.
2. W codziennej praktyce technicznej związanej z posługiwaniem się wielkościami logarytmicznymi będzie stosowana powszechnie jednostka bel, a zwłaszcza jej podwielokrotna decybel, mimo iż nie jest ona spójna z innymi jednostkami układu SI (a więc i do nich nie należy). Stosowanie tej jednostki ułatwia szybką ocenę zmian wielkości logarytmicznych, a mianowicie:
 - o 10 dB na każdy rząd wielkości zmiany stosunku wielkości mocowych i
 - o 20 dB na każdy rząd wielkości zmiany stosunku wielkości połowych.
3. Prawie wszystkie narzędzia pomiarowe są i będą skalowane oraz wzorcowane w decybelach.

4. W niedługim czasie będą następowały odpowiednie regulacje metrologiczne w odniesieniu do jednostek wprowadzonych w teorii informacji [6]. W szczególności obejmie to następujące jednostki: szanon (*shannon*), hartley i jednostkę naturalną ilości informacji, dotyczących takich wielkości logarytmicznych, jak: ilość informacji, entropia lub redundancja.

Bibliografia

- [1] *Comité consultatif des unités (CCU), rapport de la 13^e session*. Sèvres, BIPM, 1998
- [2] *Comité international des poids et mesures (CIPM), procès-verbaux de la 87^e session*. Sèvres, BIPM, 1998
- [3] Dudziewicz J.: *Podstawy telekomunikacji*. Warszawa, WNT, 1966
- [4] *Międzynarodowy słownik podstawowych i ogólnych terminów metrologii*. Warszawa, GUM, 1996
- [5] *Norme internationale. Grandeurs et unités, ISO 31. Partie 0: Principes généraux. Partie 2: Phénomènes périodiques et connexes*. Genève, 1992 (3 éd.)
- [6] PN-91/T-01016/16: *Przetwarzanie informacji i komputery. Terminologia. Teoria informacji*
- [7] *Le Système international d'unités (SI)*. Sèvres, BIPM, 1998 (7 éd.)
- [8] Zarządzenie nr 4 Prezesa Głównego Urzędu Miar z dnia 17 stycznia 1994 roku w sprawie ustalenia nazw, definicji i oznaczeń legalnych jednostek miar. Dziennik Urzędowy Miar i Probiernictwa, 1994, nr 2

Jerzy Dudziewicz



Prof. nzw. dr inż. Jerzy Dudziewicz (1921) – absolwent Politechniki Warszawskiej (1948); nauczyciel akademicki w Politechnice Warszawskiej, Wieczorowej Szkole Inżynierskiej i Akademii Górniczo-Hutniczej (1950–1984); pracownik Państwowego Instytutu Telekomunikacyjnego oraz biur konstrukcyjnych wielu zakładów wytwórczych sprzętu telekomunikacyjnego (1945–1956), długoletni pracownik naukowy i kierownik Centralnej Izby Pomiarów Telekomunikacyjnych w Instytucie Łączności w Warszawie (od 1956); autor oraz tłumacz wielu książek i artykułów; zainteresowania naukowe: dyscypliny podstawowe elektryki i telekomunikacji, metrologia elektryczna, miernictwo telekomunikacyjne. e-mail: JDudzi@astercity.net