

INSTYTUT ŁĄCZNOŚCI

KOŁO ZAKŁADOWE STOWARZYSZENIA ELEKTRYKÓW POLSKICH

Na prawach rękopisu

REFERATY PROBLEMOWE

Zeszyt 62

Zofia Rau

ALGORYTMY INTERKOMPARACJI WZORCA GRUPOWEGO

Warszawa 1983

5-9274

Zespół Redakcyjny:

dr inż. Stanisław Sońta, mgr inż. Andrzej Stągrowski

mgr inż. Krystyna Frączek

Opracowała:

mgr inż. Zofia Rau

Centralna Izba Pomiarów Telekomunikacyjnych /Z-12/

Instytut Łączności

04-894 Warszawa, ul. Szachowa 1, tel. 128-401

Praca 1.1.05.A

Opiniował: prof. dr inż. Jerzy Dudziewicz

Manuskrypt dostarczono dnia 3.XI.1983 r.

Przedstawiono metodę wyznaczania aktualnych wartości wielkości reprezentowanej przez poszczególne elementy wzorca grupowego opartą na interkomparacji. Omówiono klasyczny model matematyczny interkomparacji i związane z nim algorytmy. Poddano krytyce podstawowe założenia tego modelu i zaproponowano inny model, jak się wydaje bardziej zbliżony do rzeczywistości. Przedstawiono odpowiadające mu algorytmy interkomparacji.

Redaktor: mgr K. Juszkiewicz

Montaż tekstu: B. Skwara

---

Wpłynęło do Działu Wydawniczego Instytutu Łączności  
w Warszawie, ul. Szachowa 1 dnia 15.XII.1983 r.

Nakład 40 egz.

621.317.08

Zofia Rau

ALGORYTMY INTERKOMPARACJI WZORCA GRUPOWEGO

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp	1
2. Komparacja osiowa a interkomparacja	3
3. Algorytmy klasycznego modelu interkomparacji	8
4. Analiza założeń klasycznego modelu interkomparacji	10
5. Algorytmy urealnionego modelu interkomparacji	12
6. Zakończenie	16
Wykaz literatury	18

## ALGORYTMY INTERKOMPARACJI WZORCA GRUPOWEGO

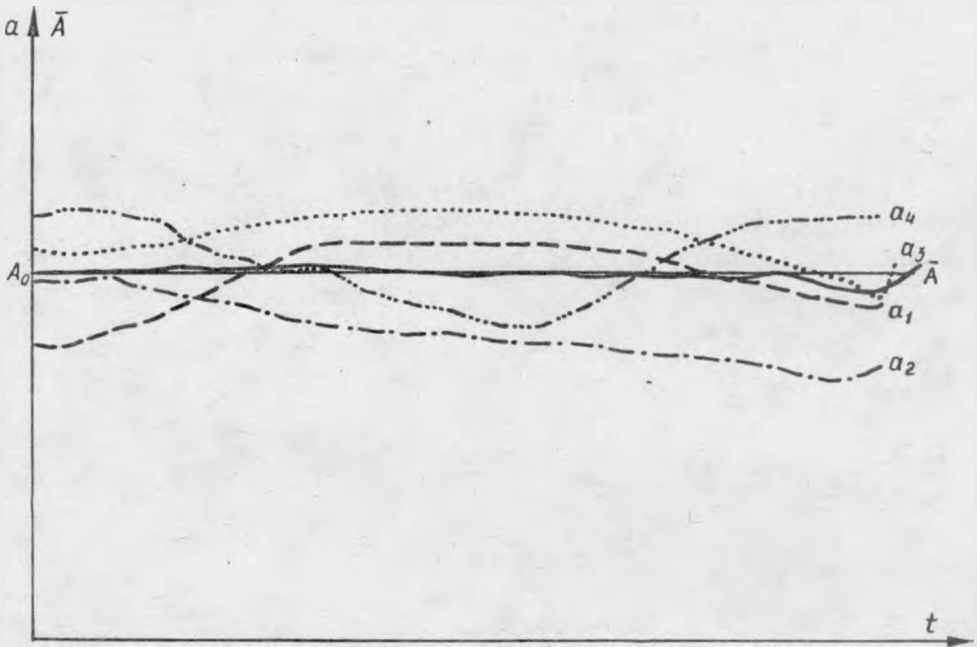
### 1. WSTĘP

Artykuł ten jest pewnego rodzaju "wycieczką" w dziedzinę metrologii, nauki o miarach, autonomicznej wobec telekomunikacji, która jednakże wykorzystuje wyniki prac metrologicznych. Dotyczy on tego działu metrologii, którego przedmiotem badań są wzorce miar wielkości elektrycznych umieszczone na szczycie hierarchicznej struktury, "drogi przekazywania miar" - na poziomie wzorców państwowych lub wzorców wyspecjalizowanych laboratoriów metrologicznych wyższego rzędu. Tam bowiem stosuje się wzorce grupowe [7].

Wzorzec grupowy jest to grupa wzorców tego samego rodzaju i wzajemnie porównywalnych, które wspólnie przedstawiają określoną wartość pewnej wielkości fizycznej lub parametru, wyrażoną przez wartość grupową - średnią ważoną wartości reprezentowanych przez poszczególne wzorce, elementy wzorca grupowego.

Wzorzec grupowy jest konstrukcją statystyczną. Jeśli liczba elementów wzorca grupowego jest dostatecznie duża, jego wartość grupowa może być uważana za niezmienną ze znacznie lepszym przybliżeniem niż wartość pojedynczego wzorca, zatem wzorzec grupowy może być wzorcem odniesienia dla wzorców pojedynczych, także dla poszczególnych wzorców wchodzących w jego skład. W trakcie eksploatacji wzorca grupowego wartości wielkości fizycznej reprezentowane przez te poszczególne wzorce mogą być w każdej chwili wyznaczone na podstawie znanej wartości grupowej.

Zachowanie się wzorca grupowego w roli wzorca odniesienia ilustruje rys. 1. Rysunek ten odnosi się do wzorca składającego się z czterech tylko elementów. Mimo małej liczby elementów wzorca grupowego i dość dużych zmian ich wartości rzeczywista wartość grupowa  $\bar{A}$  zmienia się tak nieznacznie,



Rys. 1. Przebieg zmian wartości pojedynczych wzorców i wartości grupowej utworzonego z nich wzorca grupowego

$a_1, a_2, a_3, a_4$  - wartości poszczególnych wzorców - elementów wzorca grupowego

$\bar{A} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 a_k$  - wartość grupowa wzorca grupowego składającego się z 4 elementów  $/a_1, a_2, a_3, a_4/$  o równej wadze

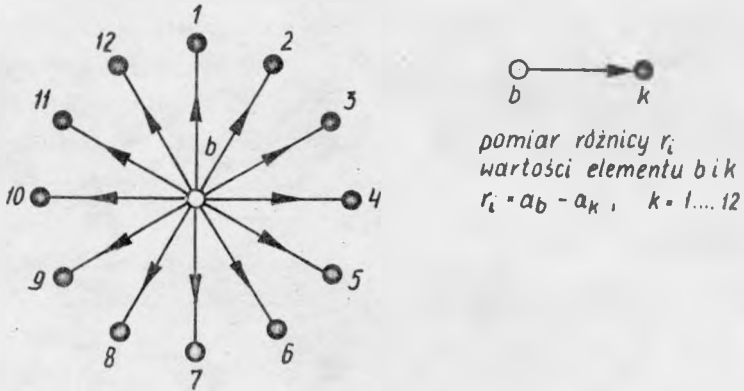
$\bar{A}_0$  - początkowa wartość grupowa przyjęta za niezmienną w okresie eksploatacji wzorca grupowego

że traktowanie jej jako niezmiennej, równej początkowej wartości  $\bar{A}_0$ , jest uzasadnione.

W Polsce wzorce grupowe zostały utworzone w Polskim Komitecie Normalizacji, Jakości i Miar /PKNMIJ/ oraz - co nie jest przypadkiem - w Instytucie Łączności, w Centralnej Izbie Pomiarów Telekomunikacyjnych /CIPT/. Wymagania co do dokładności pomiarów są bowiem większe w telekomunikacji niż w innych dziedzinach techniki, zatem i sprawdzanie przyrządów, które do tych pomiarów służą, wymaga dokładniejszych wzorców i wzorcowych przyrządów pomiarowych, a to z kolei powoduje konieczność tworzenia wzorców odniesienia o tak małej niepewności, że nie mogą to już być wzorce pojedyncze. Dotyczy to zwłaszcza pomiarów napięcia stałego i przemiennego. Rozwój techniki cyfrowej sprawił, że przyrządy wzorcowo mierzące napięcie stałe z błędem rzędu tysięcznych części procenta, a napięcie przemiennie - z błędem rzędu setnych części procenta nie są rzadkością w krajowej telekomunikacyjnej służbie pomiarowej. Dla tych wielkości zrealizowano w CIPT dwa wzorce grupowe: grupowy wzorzec napięcia stałego, składający się z ogniów Westona, i tzw. grupowy wzorzec przetwarzania, ściślej - grupowy przetwornik napięcia przemiennego na stałe, składający się z termoelektrycznych przetworników napięcia. Przy realizacji grupowego wzorca przetwarzania wyłoniły się problemy dotyczące metody wyznaczania aktualnych wartości poszczególnych elementów wzorca grupowego w odniesieniu do wartości grupowej.

## 2. KOMPARACJA OSIOWA A INTERKOMPARACJA

Do niedawna zarówno w PKNMIJ, jak w CIPT do wyznaczania aktualnej wartości elementów wzorca grupowego w odniesieniu do jego wartości grupowej stosowano metodę tzw. komparacji osiowej /à pivot/. Schemat jej podaje rys. 2. Polega ona na porównaniu wszystkich elementów wzorca grupowego z dodatkowym elementem uznanym za bazowy, na wyznaczeniu wartości elementu bazowego w odniesieniu do wartości grupowej tego



Rys. 2. Komparacja osiowa

wzorca i na określeniu aktualnych wartości poszczególnych elementów wzorca na podstawie wartości elementu bazowego. Tak więc przyjmując oznaczenia

$a_b$  - wartość elementu bazowego,

$a_k$  - wartość  $k$ -tego elementu wzorca grupowego  
/ $k = 1, \dots, m$  gdzie  $m$  - liczba elementów wzorca grupowego/.

$\bar{A}$  - wartość grupowa wzorca,

$r_k$  - wynik porównania  $k$ -tego elementu wzorca grupowego z elementem bazowym tj.

$$r_k = a_b - a_k \quad /1/$$

i zakładając, że

$$\bar{A} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m a_k \quad /2/$$

otrzymuje się

$$\sum_{k=1}^m r_k = \sum_{k=1}^m (a_b - a_k) = ma_b - \sum_{k=1}^m a_k = ma_b - \bar{A} \quad /3/$$

Ze wzoru /3/ wynikają zależności, umożliwiające wyznaczenie wartości elementu bazowego oraz wartości poszczególnych elementów wzorca grupowego:

$$a_b = \bar{A} + \frac{\sum_{k=1}^m r_k}{m} \quad /4/$$

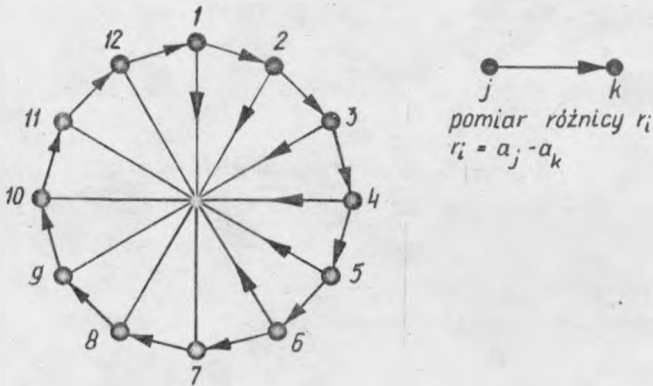
$$a_k = a_b - r_k = \bar{A} + \frac{\sum_{k=1}^m r_k}{m} - r_k \quad /5/$$

Zaletą metody komparacji osiowej jest jej prostota, wadami - konieczność przyjęcia założenia o idealnej stabilności elementu bazowego w czasie komparacji oraz możliwość zbyt optymistycznego oszacowania niepewności wyznaczonych w ten sposób wartości elementów wzorca grupowego. /Zazwyczaj niepewności te szacuje się powtarzając kilkakrotnie pomiar  $r_k$ , na podstawie rozrzutu wyników tego pomiaru/. Metoda komparacji osiowej może być zastosowana do wzorców grupowych, których wszystkie elementy są porównywalne z elementem bazowym.

Metodę interkomparacji /por. rys. 3/ zastosowano po raz pierwszy w Polsce w trakcie realizacji grupowego wzorca przetwarzania w Ił [9]. Zastosowano ją przede wszystkim dlatego, że elementy tego wzorca nie mogą być porównane z jednym elementem bazowym, ponieważ są to przetworniki termoelektryczne o różnych znamionowych napięciach wejściowych: od 0,5 V do 50 V.

Interkomparacja wzorca grupowego jest to procedura pomiarowa polegająca na wzajemnych porównaniach wartości /wielkości fizycznej lub parametru/ reprezentowanych przez elementy tego wzorca, wybrane zgodnie z pewną strukturą, zwaną schematem interkomparacji, i na wyznaczeniu aktualnych.





Rys. 3. Przykład interkomparacji

wartości tych elementów na podstawie wyników porównań i danej wartości grupowej.

Wykonuje się zatem pomiary różnic wartości elementów niejako "wewnątrz" wzorca grupowego. Wyniki pomiarów można przedstawić w postaci układu równań typu

$$r_i = \sum_{k=1}^m x_{ik} a_k + e_i \quad \text{dla } i = 1, \dots, n \quad /6/$$

gdzie

$m$  - liczba elementów wzorca grupowego,

$n$  - liczba pomiarów  $/n \geq m/$ ,

$r_i$  - wynik  $i$ -tego pomiaru,

$x_{ik}$  - współczynnik określający udział  $k$ -tego elementu w  $i$ -tym pomiarze,

$a_k$  - wartość  $k$ -tego elementu,

$e_i$  - błąd  $i$ -tego pomiaru /nieznany/.

Jeżeli interkomparacja polega na pomiarze różnic wartości elementów porównywanych bezpośrednio /z przekładnią 1/ 1

parami, to oczywiście w każdym  $i$ -tym równaniu tylko dwa współczynniki  $x_{ik}$  są różne od zera: jeden z nich przyjmuje wartość  $+1$ , a drugi  $-1$ . Zbiór wartości  $x_{ik}$  /dla  $i = 1, \dots, n$  oraz  $k = 1, \dots, m$ / określony jest przez schemat interkomparacji i tworzy macierz, zwaną macierzą schematu interkomparacji, o wymiarze  $n \times m$ .

Pomiary wykonane w trakcie interkomparacji pozwalają zorientować się w relacjach między elementami wzorca grupowego, ale nie wystarczają do określenia aktualnych wartości jego elementów  $a_k$ . Układ równań /6/ jest nieokreślony, macierz schematu interkomparacji jest rzędu  $m-1$ . Dodatkową niezbędną informacją, umożliwiającą rozwiązanie układu równań /6/ jest informacja o wartości grupowej dana w postaci równania definicyjnego wzorca grupowego:

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^m g_k a_k \quad /7/$$

gdzie:

$\bar{A}$  - wartość grupowa,

$g_k$  - waga  $k$ -tego elementu wzorca grupowego,

$a_k$  - wartość  $k$ -tego elementu wzorca grupowego.

Opracowanie wyników interkomparacji sprowadza się zatem do rozwiązania układu równań /6/ i /7/. Rozwiązanie to może być tylko przybliżone - otrzymuje się estymatory aktualnych wartości elementów wzorca grupowego. Do opracowania wyników interkomparacji powszechnie stosuje się metodę najmniejszej sumy kwadratów /MNSK/ [2 ÷ 6,8]. Wadą metody interkomparacji jest uciążliwość związanych z nią obliczeń. Zazwyczaj konieczna jest maszyna cyfrowa. Zalety metody interkomparacji przeważają jednak nad jej wadami. Interkomparacja umożliwia obiektywną, łączną ocenę niepewności pomiarów, a nawet wykrycie pewnych błędów systematycznych. Pozwala wyznaczyć aktualne wartości elementów wzorca grupowego z mniejszą niepewnością /przy tej samej liczbie pomiarów/ niż komparacja osiowa.

### 3. ALGORYTMY KLASYCZNEGO MODELU INTERKOMPARACJI

Algorytmy interkomparacji nie są jednoznacznie określone przez wybór metody opracowania wyników /powszechnie stosuje się metodę najmniejszej sumy kwadratów/, lecz zależą również od wyboru matematycznego modelu interkomparacji.

Klasyczny model interkomparacji opiera się na następujących założeniach:

- a/ poszukiwane wartości  $a_k$  elementów wzorca grupowego są wartościami deterministycznymi /a nie wielkościami losowymi/;
- b/ wartość grupowa jest również wartością deterministyczną;
- c/ wyniki pomiarów nie są obciążone błędami systematycznymi, lecz tylko przypadkowymi; nieznaną błąd przypadkowy  $i$ -tego pomiaru  $e_i$  jest konkretną realizacją wielkości losowej  $E_i$  o rozkładzie normalnym  $N(0, \sigma_1^2)$  /;
- d/ pomiary są równodokładne - wielkości losowe  $E_i$  charakteryzują się jednakową wariancją  $\sigma_1^2 = \sigma^2$  ;
- e/ błędy pomiarów nie są skorelowane.

Układ równań /6/ i /7/ można przedstawić w postaci macierzowej następująco:

$$X \cdot A = R - E \quad /8/$$

$$G^T \cdot A = \bar{A} \quad /9/$$

gdzie:

**X** jest macierzą schematu interkomparacji o wymiarze  $n \times m$ ,

**A** jest wektorem  $m$  poszukiwanych wartości elementów wzorca grupowego,

**R** jest wektorem  $n$  wyników pomiarów,

$\mathbf{E}$  jest wektorem  $n$  nieznanych błędów pomiaru,

$\mathbf{G}^T$  jest transponowanym wektorem  $m$  wag przypisanych elementom wzorca grupowego .

Z założeń d/ i e/ wynika, że macierz kowariancji błędów pomiaru  $\Sigma(\mathbf{E})$  ma postać następującą

$$\Sigma(\mathbf{E}) = \mathbf{I} \cdot \sigma^2 \quad /10/$$

gdzie  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową.

Poszukuje się takich estymatorów  $\hat{a}_k$  /tworzących wektor estymatorów  $\hat{\mathbf{A}}$  / aktualnych wartości elementów  $a_k$ , które spełniłyby warunek

$$[\mathbf{R} - \mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{A}}]^T [\mathbf{R} - \mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{A}}] = \min \quad /11/$$

i jednocześnie spełniłyby ściśle równanie /9/.

Warunek określony zależnością /11/ jest właśnie żądaniem minimalizacji sumy kwadratów reszt powstałych z odjęcia estymowanych wyników pomiaru /  $\mathbf{X} \hat{\mathbf{A}}$  / od rzeczywistych wyników pomiaru /  $\mathbf{R}$  /.

Poszukiwanie rozwiązania MNSK równania /8/, spełniającego ściśle równanie /9/ jest problemem dobrze znanym w statystyce matematycznej. Rozwiązanie to podają, np. Hughes i Musk [5] opierając się na [4]. Prowadzi ono do następujących algorytmów:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & 0 \end{array} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{R} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad /12/$$

$$s^2 = \frac{[\mathbf{R} - \mathbf{X} \hat{\mathbf{A}}]^T [\mathbf{R} - \mathbf{X} \hat{\mathbf{A}}]}{n - m + 1} \quad /13/$$

$$s(\hat{\mathbf{A}}) = \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & 0 \end{array} \right\}^{-1} s^2 \quad /14/$$

gdzie:

- $\lambda$  - tzw. mnożnik Lagrange'a, parametr pomocniczy,
- $s^2$  - estymator wariancji błędów pomiarów  $\sigma^2$ ,
- $S(\hat{A})$  - estymator macierzy kowariancji dla  $\hat{A}$ .

Rozwiązanie MNSK charakteryzuje szereg cennych właściwości:

- estymatory  $\hat{A}$  są nieobciążone, tzn. wartością oczekiwaną każdego estymatora  $\hat{a}_k$  jest aktualna rzeczywista wartość  $a_k$  elementu wzorca grupowego;
- obszar niepewności dla rozwiązania  $\hat{A}$  jest najmniejszy wśród obszarów niepewności wszystkich możliwych estymatorów nieobciążonych i liniowych;
- dowolna forma liniowa  $C^T \cdot \hat{A}$ , gdzie  $C$  jest wektorem stałych współczynników, ma również minimalną wariancję, tak więc jeśli dla dowolnej podgrupy wzorca określona zostanie w wyniku interkomparacji jej wartość grupowa, to niepewność tej wartości będzie najmniejsza z możliwych;
- estymator  $s^2$  jest nieobciążonym estymatorem  $\sigma^2$ ;
- wektor reszt  $[R - X\hat{A}]$ , a więc i  $s^2$  nie są skorelowane z wektorem estymatorów  $\hat{A}$ .

#### 4. ANALIZA ZAŁOŻEŃ KLASYCZNEGO MODELU INTERKOMPARACJI

Czy założenia klasycznego modelu interkomparacji są zgodne z rzeczywistością? Jest to co najmniej wątpliwe. Każde z założeń jest uproszczeniem, uzasadnionym w określonej sytuacji, lecz niesłusznym generalnie. Dobrym "czujnikiem" niezgodności modelu interkomparacji z rzeczywistością jest wartość estymatora wariancji błędów pomiaru  $s^2$ . Wariancję tę można oszacować także innym sposobem - na podstawie rozrzutu wyników pomiaru wielokrotnie powtarzanego. Jeśli oba oszacowania nie są zgodne, model interkomparacji nie odpowiada rzeczywistości. Taka sytuacja istotnie zdarzała się w trakcie

opracowania w It wyników interkomparacji wzorców grupowych zarówno własnych, jak należących do PKNM1J. Przyczyny niezgodności mogą być następujące:

- a/ Wartości elementów wzorca grupowego nie są wartościami deterministycznymi. Elementy te reagują na różnorakie, wpływy zewnętrzne, których skutkiem jest nie tylko dryft ich wartości, lecz także zmiany przypadkowe. Słuszniejsze zatem byłoby stwierdzenie, że wartości elementów są wielkościami losowymi, w chwili interkomparacji skupionymi wokół wartości oczekiwanej  $a_k$  z niewielką wariancją.
- b/ Wartość grupowa również jest wielkością losową, a to z dwóch powodów: po pierwsze - wyznaczone jest na podstawie pomiarów, jako funkcja wielkości losowych, wyników pomiarów o określonej niepewności; po drugie - w trakcie eksploatacji wzorca grupowego ulega zmianom wskutek przypadkowych zmian wartości poszczególnych elementów wzorca grupowego.
- c/ W niektórych przypadkach w trakcie interkomparacji pojawiają się błędy systematyczne - np. spowodowane polaryzacją układu pomiarowego lub jego niestabilnością w czasie.
- d/ Jeśli rozrzut wartości elementów wzorca grupowego jest duży, może zdarzyć się, że w trakcie interkomparacji konieczna jest zmiana czułości komparatora. Niepewność pomiarów może się wówczas znacznie różnić.
- e/ Zazwyczaj obserwuje się słabą korelację błędów pomiarów spowodowaną wpływem warunków pomiaru na układ pomiarowy i obserwatora. Przyjęcie lub odrzucenie założenia e/ powinno być oparte na wynikach odpowiedniego testu.

Warto wspomnieć, że przyjęcie założenia o deterministycznym charakterze wartości elementów wzorca grupowego, gdy losowy charakter przynajmniej części z nich jest wyraźny, po-

woduje powiększenie niepewności przypisywanej pomiarom, a także pozornie różną niepewność pomiarów i ich korelacje.

## 5. ALGORYTMY UREALNIONEGO MODELU INTERKOMPARACJI

Należy podkreślić, że możliwości urealnienia modelu interkomparacji powstają w toku kolejnych interkomparacji konkretnego wzorca grupowego w miarę gromadzenia informacji o wzorcu i procedurze pomiarowej. Urealniając model interkomparacji dąży się do zmniejszenia lub przynajmniej objaśnienia niezgodności estymatorów błędu pomiaru  $s^2$  uzyskanych metodą NSK oraz  $s^{2*}$  uzyskanych na podstawie rozrzutu wyników pomiaru. Przy tym pożądanym jest zachowanie cennych właściwości estymatorów MNSK.

Warunki te spełnia stosowany w CIPT model interkomparacji grupowego wzorca przetwarzania, który nie wymaga spełnienia założeń /b/ /d/ oraz częściowo - /c/ modelu klasycznego. Rozważano również możliwość odrzucenia założenia a/ o deterministycznym charakterze poszukiwanych wartości elementów wzorca grupowego i częściowo uwzględniono losowy charakter tych wartości - np. w próbie określenia niepewności wartości grupowej - jednakże konsekwentne odrzucenie tego założenia nie dałoby na razie żadnych korzyści z powodu braku dostatecznych informacji o relacjach między wariancją błędu pomiaru i wariancjami rzeczywistych wartości elementów wzorca grupowego. Odrzucenie założenia o normalnym rozkładzie błędów pomiaru /część założenia c/ byłoby nieuzasadnione, ponieważ odpowiednie testy dają wynik pozytywny. Również nieuzasadnione byłoby na razie odrzucenie założenia o braku korelacji między wynikami pomiarów, tym bardziej, że odrzucenie tego założenia zmieniałoby właściwości estymatorów MNSK.

Przyjęcie losowego charakteru wartości grupowej zmienia rolę równania definicyjnego wzorca grupowego w układzie równań /8/, /9/. Z równania ograniczenia narzuconego na rozwiązanie MNSK staje się ono jednym z równań spełnionych w spo-

sób przybliżony i rozwiązywanych tą metodą. Powstaje problem oszacowania wariancji wartości grupowej. Wariancja ta ma dwie składowe.

Jedna składowa pochodzi z niepewności komparacji elementów wzorca grupowego z wzorcem zewnętrznym wyższego rzędu, w wyniku której określono wartość grupową w momencie utworzenia wzorca grupowego. Na podstawie niepewności  $s(a_{k0})$  przypisanych wartościom początkowym  $a_{k0}$  elementów wzorca grupowego, podanych w świadectwie komparacji można oszacować tę składową wariancji w sposób następujący

$$s_0^2(\bar{A}) = \sum_{k=1}^m g_k^2 s^2(a_{k0}) \quad /15/$$

Druga składowa wariancji jest związana z przypadkowymi zmianami wartości poszczególnych elementów wzorca grupowego. Proponuje się więc, aby za jej miarę przyjąć kwadrat tzw. niestabilności wewnętrznej wzorca grupowego  $N_w^2$ , wyznaczonej w toku kolejnych jego interkomparacji

$$N_w = \sqrt{\sum_{k=1}^m g_k^2 (\hat{a}_k^{i+1} - \hat{a}_k^i)^2} \quad /16/$$

gdzie  $\hat{a}_k^{i+1} - \hat{a}_k^i$  jest zmianą wartości k-tego elementu wyznaczoną na podstawie wyników i-tej i /i + 1/-ej interkomparacji.

Trzeba tu jednak uczynić dwa zastrzeżenia. Po pierwsze, niestabilność wewnętrzna powinna wykraczać poza obszar niepewności interkomparacji. Po drugie, nie może ona obejmować dryftu wartości elementów tylko ich zmiany przypadkowe / $N_w$  jest wtedy niezależna od odstępu czasu między interkomparacjami/. Wówczas

$$s^2(\bar{A}) = s_0^2(\bar{A}) + N_w^2 \quad /17/$$

W urealnionym modelu interkomparacji przyjmuje się, że błędy poszczególnych pomiarów mogą się charakteryzować



różnymi wariancjami, lecz że nie są skorelowane. Zatem macierz kowariancji błędów pomiaru ma postać następującą:

$$\Sigma(\epsilon) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{w_n} \end{bmatrix} \sigma^2 = W^{-1} \sigma^2 \quad /18/$$

$w_1 \dots w_n$  są to wagi przypisane pomiarom, a  $W$  jest macierzą wag

$$w_i = \frac{s^2}{s_i^2} \quad /19/$$

gdzie  $s^2$  jest estymatorem wariancji najdokładniejszego pomiaru o rzeczywistej wariancji  $\sigma^2$  uznanej za wariancję odniesienia, a  $s_i^2$  estymatorem wariancji  $i$ -tego pomiaru.

Dla opracowania wyników interkomparacji konieczne jest wcześniejsze zgrubne wyznaczenie tych estymatorów, np. z rozrzutu wyników pomiaru.

Macierz  $\Sigma(\epsilon)$  można rozszerzyć tak, aby obejmowała ona wariancję wartości grupowej

$$\Sigma_r(\epsilon) = \begin{bmatrix} \Sigma(\epsilon) & 0 \\ 0 & \sigma_A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & W_A \end{bmatrix}^{-1} \sigma^2 \quad /20/$$

gdzie  $W_A = \frac{s^2}{s^2(\bar{A})}$  jest wagą wartości grupowej

Istnieje również możliwość uwzględnienia w modelu interkomparacji wpływu czynników zewnętrznych powodujących błędy systematyczne, pod warunkiem, że charakter ich jest znany. Można to zrobić rozszerzając macierz schematu interkomparacji o 1 kolumn współczynników /odpowiadających 1 czynnikom wpływającym/ określających charakter wpływu /np. kolumna jedynkowa dla stałego błędu systematycznego itp./, czyli o macierz wpływów  $X_L$ , oraz rozszerzając wektor poszukiwanych wartości  $A$  o parametry czynników wpływających  $L$

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_I \\ \mathbf{x}'_L \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix}$$

Traktując równanie definicyjne wzorca grupowego jako jedno z równań rozwiązywanych metodą NSK rozszerza się macierz schematu interkomparacji o wiersz odpowiadający temu równaniu, wektor wyników pomiarów o wartość grupową i wektor błędów pomiarów o błąd wartości grupowej, tak więc

$$\mathbf{X}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_I & \mathbf{x}_L \\ \mathbf{g}_T & \mathbf{o} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \frac{\mathbf{E}}{\theta \bar{\mathbf{A}}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_r = \mathbf{A}'$$

i układ równań interkomparacji przedstawia się następująco:

$$\mathbf{X}_r \cdot \mathbf{A}_r = \mathbf{R}_r - \mathbf{E}_r \quad /21/$$

Poszukuje się estymatorów  $\hat{\mathbf{A}}$ , które spełniałyby warunek

$$\left[ \mathbf{R}_r - \mathbf{X}_r \hat{\mathbf{A}}_r \right]^T \mathbf{W}_r \left[ \mathbf{R}_r - \mathbf{X}_r \hat{\mathbf{A}}_r \right] = \min \quad /22/$$

Rozwiązaniem układu równań /21/ jest /por. [2,6,8]/:

$$\hat{\mathbf{A}}_r = \left\{ \mathbf{X}_r^T \mathbf{W}_r \mathbf{X}_r \right\}^{-1} \mathbf{X}_r^T \mathbf{W}_r \mathbf{R}_r \quad /23/$$

Macierz kowariancji dla  $\hat{\mathbf{A}}_r$  szacuje się z zależności

$$\mathbf{s}(\hat{\mathbf{A}}_r) = \left\{ \mathbf{X}_r^T \mathbf{W}_r \mathbf{X}_r \right\}^{-1} s^2 \quad /24/$$

gdzie 
$$s^2 = \frac{\left[ \mathbf{R}_r - \mathbf{X}_r \hat{\mathbf{A}}_r \right]^T \mathbf{W}_r \left[ \mathbf{R}_r - \mathbf{X}_r \hat{\mathbf{A}}_r \right]}{n - (m+1) + 1} \quad /25/$$

$s^2$  jest estymatorem najmniejszej wariancji pomiaru /wa-

riancji odniesienia /. Wariancję dowolnego i-tego pomiaru szacuje się, biorąc pod uwagę /18/:

$$s_i^2 = \frac{1}{w_i} s^2 \quad /26/$$

Rozwiązanie to posiada wszystkie cenne właściwości rozwiązań MNSK.

## 6. ZAKOŃCZENIE

Na podstawie omówionych wyżej algorytmów interkomparacji opracowano programy INVER i ASTER, wchodzące w skład systemu programistycznego "Komparacja II" [10], dostosowanego do EMC R32 /por. rys. 4/.

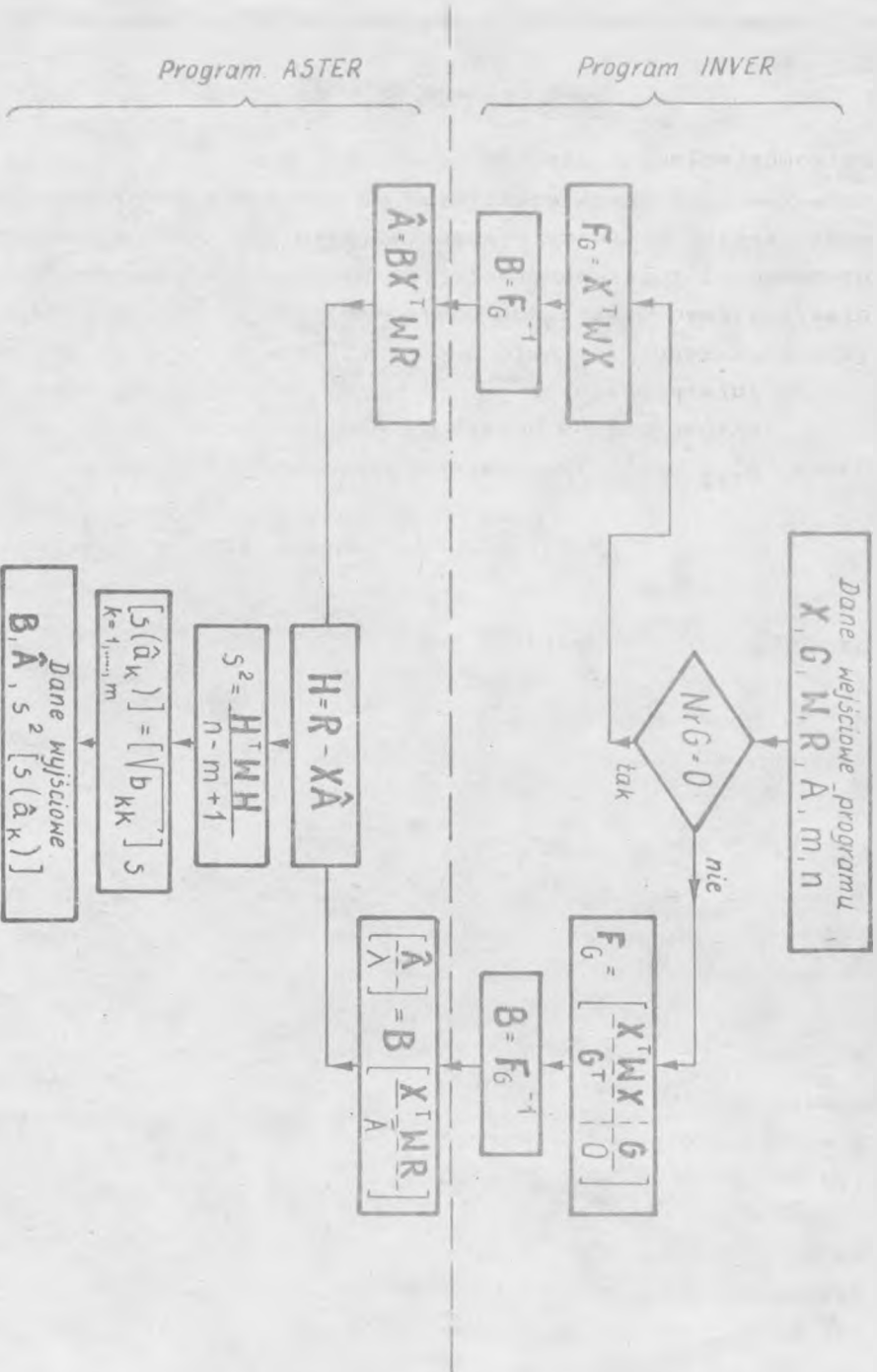
Pierwszy z nich służy do obliczania odwrotności macierzy

$$\begin{bmatrix} X_r^T W_r X_r \end{bmatrix} \text{ lub } \begin{bmatrix} X^T W X & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix}, \text{ czyli do obliczania macierzy}$$

przekładni wariancyjnych właściwych dla danego schematu interkomparacji, dlatego może też służyć do oceny schematu interkomparacji. Drugi program służy do obliczania estymatorów aktualnych wartości elementów wzorca grupowego, ich macierzy kowariancji oraz estymatora wariancji błędów pomiarów. Inne części systemu "Komparacja II", które są programistycznym odpowiednikiem metod porównywania wyników kolejnych interkomparacji, będą, być może, tematem odrębnego artykułu.

Zmodernizowany system "Interkomparacja" [1], opracowany ostatnio w IŁ, nie różni się w sposób istotny od systemu "Komparacja II" pod względem algorytmów obliczeń wykonywanych za pomocą programów odpowiadających programom INVER i ASTER. Jednakże rozbudowa programu INVER zmieniła operacyjne właściwości tego programu. Między innymi, wskutek możliwości algorytmicznego tworzenia macierzy  $X$ , dokonywania w niej skreśleń i uzupełnień, system "Interkomparacja" dosko-

Rys. 4. Schemat obliczeń w programach INVER/ASTER systemu "Komparacja II"



nale nadaje się do badania modelu interkomparacji i oceny parametrów wpływających na wynik interkomparacji.

Oba systemy programistyczne zostały zastosowane w praktyce do opracowania wyników kolejnych interkomparacji grupowego wzorca przetwarzania CIPT oraz grupowych wzorców napięcia stałego PKNMiJ i CIPT.

BIBLIOTEKA

Instytutu Łączności

## WYKAZ LITERATURY

Nr S-9274

1. Andrzejewska J.: Dokumentacja programistyczno-eksploatacyjna zmodernizowanego systemu oceny wyników interkomparacji "Interkomparacja" na EMC R32. IŁ, Warszawa 1982.
2. Bjerhammar A.: Theory of errors and generalized matrix inverses. Elsevier Sc.Publ. Co., Amsterdam 1973.
3. Carré P.: Comparaison de deux groupes de piles étalons. Principes mathematiques du traitement par le programme CAPRW. Rapport BIPM - 75/10.
4. Goldman A.J., Zelen M.: Weak Generalized Inverses and Minimum Variance Linear Unbiased Estimation, Journal of Research of NBS, vol. 68B, No 4, 1964.
5. Hughes C.G., Musk A.: A Least Squares Method for Analysis of Pair Comparison Measurements. Metrologia vol. 8, No 3, 1972.
6. Linnik J.W.: Metoda najmniejszych kwadratów i teoria opracowywania obserwacji. PWN, Warszawa 1962.
7. Praca zbiorowa: Etalony i precyzyjne pomiary wielkości elektrycznych. Rozdz. 5. WKiŁ, Warszawa 1982.
8. Rao C.R.: Modele liniowe statystyki matematycznej. PWN, Warszawa 1982.
9. Rau Z.: Interkomparacja grupowego wzorca przetwarzania napięcia przemiennego na stałe. Materiały konferencyjne. XII Międzyuczelniana Narada Metrologów. Poznań 1977.
10. Szymańska E.: Dokumentacja programistyczno-eksploatacyjna systemu oceny wyników interkomparacji "Komparacja II" na EMC R32. IŁ, Warszawa 1979.